# OPTIMALITÄT VON VERALLGEMEINERTEN ( s, S ) - POLITIKEN BEI MEHRPRODUKTLAGERMODELLEN

Inaugural-Dissertation
zur
Erlangung der Doktorwürde
der
Hohen Mathem.-Naturw. Fakultät
der
Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität
zu
BONN

vorgelegt von

DIETER KALIN

aus

MÜLHEIM AN DER RUHR

BONN 1976

# OPTIMALITÄT VON VERALLGEMEINERTEN ( s, S ) - POLITIKEN BEI MEHRPRODUKTLAGERMODELLEN

Inaugural-Dissertation
zur
Erlangung der Doktorwürde
der
Hohen Mathem.-Naturw. Fakultät
der
Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität
zu
BONN

vorgelegt von

DIETER KALIN

aus

MÜLHEIM AN DER RUHR

BONN 1976

Angefertigt mit Genehmigung der Mathematisch -
Naturwissenschaftlichen Fakultät der Universität Bonn.

1. Referent: Professor Dr. M. Schäl

2. Referent: Professor Dr. W. Vogel

Tag der mündlichen Prüfung: 12. Februar 1976

Institut für Angewandte Mathematik und Informatik der
Universität Bonn

Abt. für Wahrscheinlichkeitstheorie und Mathematische
Statistik

Direktor: Professor Dr. W. Vogel

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Druck: Rheinische Friedrich - Wilhelms - Universität Bonn

Meinen Eltern

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41523712_0031

Inhalt


| | | |
|---|---|---|
| I | Einleitung | 7 |
| II | Endlicher Horizont | 15 |
| | § 1 Lagerdeterminanten | 15 |
| | § 2 Das dynamische Entscheidungsmodell | 19 |
| | § 3 Unimodal erzeugte Funktionen und Bedingungen für die Optimalität verallgemeinerter (s,S) - Politiken | 24 |
| | § 4 Die Bedingungen $(A_i)$ und $(B_i)$ als Vorbereitung für den Optimalitätsbeweis | 31 |
| | § 5 Existenz und Struktur einer optimalen verallgemeinerten (s,S) - Politik | 37 |
| | § 6 Überlegungen zur Meßbarkeit | 45 |
| | § 7 Spezialfälle des allgemeinen Lagermodells | 48 |
| III | Unendlicher Horizont | 51 |
| | § 8 Das stationäre Modell, Problemstellung und Normierung der optimalen endlichstufigen Pläne | 51 |
| | § 9 Gleichmäßige Konvergenz der Wertfunktion des endlichstufigen Modells bei linearer terminaler Funktion und Wertiteration | 60 |
| | §10 Gültigkeit der Planiteration | 68 |
| | §11 Optimalität einer stationären verallgemeinerten (s,S) - Politik | 71 |
| | §12 Beispiele zur Kostenfunktion G | 77 |
| IV | Literaturverzeichnis | 81 |
| V | Symbolliste | 84 |

## I Einleitung

Bei (in der Praxis realisierbarer) periodischer Inspektion eines Lagers entstehen im allgemeinen in Bezug auf den Bestand des Lagers zu Beginn einer Periode die beiden folgenden Fragen:

(1) Soll der aktuelle Lagerbestand vergrößert werden?

(2) Wenn ja, dann um wieviele Einheiten?

Diese Fragestellung ist sinnvoll, falls zuvor festgelegt wird, welches Ziel durch die Entscheidungen zu (1) und (2) erreicht werden soll. Nimmt man an, daß die Nachfrage nach Lagergütern innerhalb einer Periode nicht bekannt ist, wohl aber deren Verteilungsfunktion, dann wird man etwa versuchen, den Erwartungswert der Gesamtkosten oder auch den der Durchschnittskosten zu minimieren, d.h.: die Entscheidungen zu (1) und (2) so zu treffen, daß alle anderen möglichen Entscheidungen nicht kostengünstiger sind. Entscheidungsregeln, die simultan Frage (1) und (2) beantworten, werden dabei als Politiken bezeichnet, und bei gegebener Kostenstruktur eines Lagers wird man also einmal nach der Existenz einer optimalen Politik, zum anderen nach der Struktur dieser Politik fragen. Wir interessieren uns in der vorliegenden Arbeit ausschließlich für den Erwartungswert der Gesamtkosten, und durch geeignete Wahl der Zielfunktion wird sowohl der Fall von endlich vielen, als auch der von unendlich vielen Planungsperioden berücksichtigt.

Sowohl die Verschiedenheit, als auch die Vielfalt der vorliegenden Ergebnisse zum Problem der optimalen Steuerung eines Lagers läßt es vernünftig erscheinen, zwischen der Theorie der Einproduktlagermodelle und der der Mehrproduktlagermodelle zu unterscheiden.

Neben vielen Publikationen zum Problem des Einproduktlagers sind als grundlegende Arbeiten, in denen sich die Bestellkosten aus fixen und linearen Kosten zusammensetzen, diejenigen von SCARF (60) und VEINOTT (66) zu nennen, in denen unterschiedliche Bedingungen für die Optimalität von sogenannten

(s,S) - Politiken angegeben werden; dabei wird ein Lager durch eine (s,S) - Politik gesteuert, falls für einen Bestand von x Einheiten zu Beginn einer Periode Frage (1) genau dann positiv beantwortet wird, wenn x<s ist und Frage (2) dann durch S-x. Eine Fülle weiterer Literaturangaben findet man etwa in HOCHSTÄDTER (69). Allgemeinere Formen von Bestellkosten werden beispielsweise von PORTEUS (71) behandelt, bei dem die optimale Steuerung durch eine verallgemeinerte (s,S) - Politik erfolgt, die allein durch die Parameter s und S nicht mehr beschrieben werden kann. In SCHÄL (75b) werden für die Optimalität einer (s,S) - Politik neue Bedingungen angegeben, die u.a. diejenigen von SCARF (60) und VEINOTT (66) als Spezialfälle enthalten. Konzept dieser Arbeit ist dabei ein sehr allgemeiner Konvexitätsbegriff, der zum einen die gewöhnlichen konvexen, und zum anderen die monotonen Funktionen einschließt.

Eine unmittelbare Übertragung der Ideen und Ergebnisse von Einproduktlagermodellen auf den Fall der Mehrproduktlager ist wohl im allgemeinen nicht möglich, da z.B. schon die Vollordnung der reellen Zahlen stark in die verschiedensten Ergebnisse eingeht. Mehrproduktmodelle sind jedoch einmal in der Praxis relativ häufig vertreten, zum anderen lassen sich in der Regel bei simultaner Auffüllung verschiedener Produkte eines Lagers Kostenersparnisse bei den Bestellkosten erreichen. An Arbeiten über Mehrproduktmodelle seien hier etwa die von VEINOTT (65) und IGNALL/VEINOTT (69) genannt, in denen die Bestellkosten als linear angenommen werden.

Bei dem Versuch, Ergebnisse bei Einproduktmodellen auf m-Produktmodelle zu übertragen, wird man sich einmal von dem Gedanken leiten lassen, daß sich im Spezialfall m=1 wieder "vernünftige" Ergebnisse für Einproduktlager ergeben - möglichst also wieder (s,S) - Politiken - und zum anderen bestrebt sein, die Annahmen des Modells so zu wählen, daß auch diese im Fall m=1 zwanglos in für Einproduktmodelle übliche Annahmen übergehen.

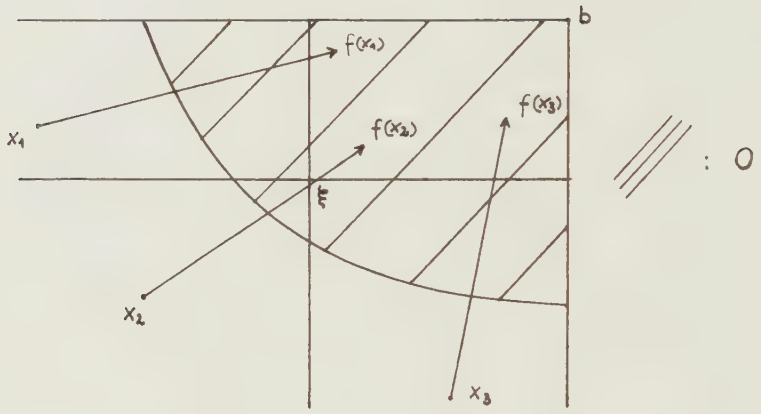
Ausgehend von dem allgemeinen Modell in SCHÄL (75b) geben wir im folgenden - zunächst für endlichen Planungshorizont - ein m-Produktmodell an und weisen die Existenz von optimalen Politiken nach. Wir nehmen dabei an, daß sich die Bestellkosten aus linearen und fixen Kosten zusammensetzen und berücksichtigen darüber hinaus mittlere Lagerungs- und Fehlmengenkosten. Dabei ist der Fall der Vormerkung von nicht befriedigter Nachfrage als auch der, bei dem nicht befriedigte Nachfrage verlorengeht stets eingeschlossen; darüber hinaus sind nach Ablauf von N Perioden die Fälle "kein Wertverlust", "totaler Wertverlust" und innerhalb gewisser Grenzen auch "Wertverlust durch Wertverminderung" zugelassen. Wie allgemein üblich, werden dabei zukünftige Kosten durch ein $0<\alpha\leq 1$ diskontiert.

Die erzielte optimale Politik kann dabei als eine verallgemeinerte (s,S) - Politik in dem Sinne aufgefaßt werden, daß sie sich im Fall m=1 als eine (s,S) - Politik darstellt. Darüber hinaus geben wir Spezialfälle an (Fixkosten identisch Null), in denen die optimale Politik schon durch einen (vektorwertigen) Parameter eindeutig charakterisiert ist.

Das Prinzip einer verallgemeinerten (s,S) - Politik soll im Fall m=2 für eine Periode kurz skizziert werden.

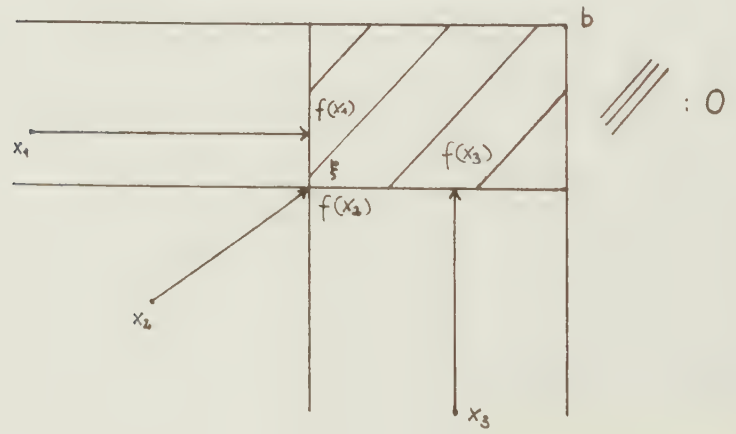
Bedeute $b^1$ die Lagerkapazität für das Gut I, $b^2$ die für das Gut II, sei $b = (b^1,b^2)'$ und $\xi = (\xi^1,\xi^2)'$ ein ausgezeichneter Punkt (der in §3 als Minimum einer einperiodigen Kostenfunktion G näher charakterisiert wird), dann wird durch O die Menge derjenigen Lagerbestände zu Beginn einer Periode beschrieben, bei der keine Auffüllung des Lagers erfolgt. Fällt der aktuelle Lagerbestand x nicht in die Menge O, dann wird das Lager aufgefüllt auf einen (noch näher zu kennzeichnenden) Wert $f(x)\in\{z \mid \xi\leq z\leq b\} \subset O$.

Abbildung 1:




Im angesprochenen Spezialfall (vergl. §§7,12) vereinfacht sich dies zu $f(x) = \max(x,\xi)$ und $O = \{z \mid \xi \leq z \leq b\}$, was dargestellt ist in

Abbildung 2:



Zur Beschreibung und Lösung des Optimierungsproblems wird ein stochastisches dynamisches Entscheidungsmodell im Sinne von HINDERER (70) herangezogen, das beim Planungshorizont von N Perioden als instationäres (und später bei unendlichem Planungshorizont als stationäres) Modell gewählt wird.
Näheres zum Problemkreis des endlichen Horizontes kann noch aus der folgenden Übersicht entnommen werden.

Betrachtet man ein stationäres Modell mit unendlichem Planungshorizont, dann interessiert neben der Existenz und der Struktur von optimalen Politiken auch der Zusammenhang zu den zugehörigen stationären Modellen mit endlichem Planungshorizont. Genauer: Man fragt nach der Gültigkeit der Wertiteration, der Planiteration und danach, wie die Struktur des endlichen Modells mit der des unendlichen Modells zusammenhängt (zur präzisen Fragestellung siehe §8). Wir wählen ein spezielles stationäres endliches Modell mit linearer terminaler Funktion und weisen die gleichmäßige Konvergenz der Wertfunktion nach; dies geschieht mittels einer Rekursion, wie sie in LIPPMAN (69) und IGLEHART (63) für den eindimensionalen Fall zu finden ist, und die sich durch eine zusätzliche Normierung der optimalen Politiken für Modelle mit endlichem Horizont auch bei Mehrproduktlagern durchführen läßt. Allgemeine Sätze aus SCHÄL (74,75a) erlauben dann, die Existenz einer optimalen stationären Politik und die Gültigkeit der Wert- und Planiteration auch bei nicht verschwindender terminaler Funktion zu verifizieren. Die Struktur der optimalen Politik des endlichen Falls überträgt sich auf den unendlichen Planungshorizont (§11), so daß auch in diesem Fall das Lager mit verallgemeinerten (s,S) - Politiken optimal gesteuert werden kann, die überdies stationär gewählt werden können.

Wir geben nun eine kurze Übersicht über den Inhalt der einzelnen Paragraphen:

§ 1 beschreibt die das Lagermodell charakterisierenden Größen, wie z.B. Kostenfunktionen, Kontrollmodus des

Lagers, und formuliert die Optimierungsaufgabe mittels Markoffscher Auffüllpolitiken.

§ 2 bettet die Problemstellung in ein dynamisches Entscheidungsmodell ein und stellt Optimalitätskriterien für weitere Überlegungen zur Verfügung.

§ 3 führt u.a. den später zum tragen kommenden Begriff der unimodal erzeugten Funktion ein, der im hier vorliegenden Modell an die Stelle der vom Einproduktmodell her bekannten unimodalen Funktion tritt, und gibt die Generalvoraussetzungen für das Kapitel II an.

§ 4 leitet den Beweis der Optimalität einer verallgemeinerten (s,S) - Politik ein und liefert erste Strukturaussagen des Modells, die in

§ 5 erweitert und durch die Formulierung einer stark optimalen Politik ergänzt werden. Insbesondere wird gezeigt, daß sich im Fall m=1 wieder eine (s,S) - Politik ergibt.

§ 6 klärt die bis dahin aufgetretenen Meßbarkeitsfragen und

§ 7 untersucht einmal den Spezialfall nur linearer Bestellkosten, in dem man (unter einer zusätzlichen Bedingung) das System mit nach VEINOTT (65) und K.ARROW sogenannten "myopic politics" steuern kann (man vergleiche hierzu auch die Arbeiten von JOHNSON/THOMPSON (75), IGNALL/VEINOTT (69)), und zeigt darüber hinaus, daß in diesem Fall bei zusätzlich stationär angenommenem Modell auch bei endlichem Horizont stationäre Pläne zur optimalen Steuerung gewählt werden können. Schließlich wird dasjenige stationäre Modell mit linearer terminaler Funktion formuliert, mit dem der Übergang zum Modell mit unendlichem Horizont erreicht wird.

§ 8 formuliert das in Kapitel III für den unendlichen Planungshorizont zugrundegelegte stationäre Modell, die zugehörige Optimierungsaufgabe, sowie Optimalitätskriterien, und stellt die Problemstellung über den Zusammenhang des endlichen und des unendlichen Planungshorizontes dar. Darüberhinaus werden die Generalvoraussetzungen für

Kapitel III angegeben und es folgen Überlegungen, die in der (später benötigten) Normierung der optimalen Pläne bei endlichem Horizont münden.

§ 9 zeigt, daß sich mit Hilfe der getroffenen Normierung die gleichmäßige Konvergenz der Wertfunktion auch bei linearer terminaler Funktion verifizieren läßt, und daß eine lineare terminale Funktion "keinen großen Einfluß" auf das Grenzverhalten der Wertfunktion hat, so daß sich schließlich aus allgemeinen Sätzen von SCHÄL (74,75a) die Existenz einer optimalen Politik und die Gültigkeit der Wertiteration ergibt.

§10 trägt die notwendigen Aussagen zur Gültigkeit der Planiteration zusammen und

§11 weist nach, daß sich die Struktur des Modells mit endlichem Horizont auf den Fall des unendlichen Horizontes überträgt, und daß zur optimalen Steuerung wieder - jetzt sogar stationäre - verallgemeinerte (s,S) - Politiken gewählt werden können. Im Spezialfall nur linearer Bestellkosten wird - ähnlich zu §7 - eine Bedingung angegeben, bei der die stationäre optimale Politik allein durch einen (vektorwertigen) Parameter charakterisiert ist. Die Aussagen von §7 zum Themenbereich "myopic policy" gelten sinngemäß.

§12 schließlich bringt Beispiele zu unimodal erzeugten Kostenfunktionen, die sinngemäß auch für Kapitel II verwendet werden können.

Herrn Professor Dr. Walter Vogel und Herrn Professor Dr. Manfred Schäl gilt mein herzlicher Dank.

Herrn Professor Vogel danke ich, daß er mir diese Arbeit an seinem Institut für Wahrscheinlichkeitstheorie und Mathematische Statistik ermöglicht hat, und für die Unterstützung während ihrer Entstehungszeit.

Herrn Professor Schäl gilt mein ganz besonderer Dank für die Anregung zu dieser Arbeit und für die fortwährende Betreuung bei der Durchführung durch viele Gespräche, wertvolle Hinweise und Verbesserungsvorschläge.

Darüberhinaus geht mein Dank an Sigrid Kreuder, die mit großer Sorgfalt das Manuskript dieser Arbeit anfertigte.

## II Endlicher Horizont

### § 1 Lagerdeterminanten

Wir betrachten ein Lager, in dem m Güter gelagert werden, $m \in \mathbb{N}$. Der aktuelle Lagerbestand kann also als ein Punkt des $\mathbb{R}^m$ aufgefaßt werden.
Der Planungszeitraum umfasse N Perioden und die Nachfrage in der i-ten Periode, $1 \le i \le N$, sei durch $D_i$, eine nicht-negative zufällige Größe gegeben. Die $D_i$ seien unabhängig und ihre Verteilungsfunktion sei für $1 \le i \le N$ gegeben durch $\Phi_i(\lambda_1,\ldots,\lambda_m)$. Für die Nachfrage gelte $D_i \in \mathcal{Y}_i \subset \mathbb{R}^m_+$ und die Lagergröße der i-ten Periode sei durch ein $b_i \in \mathbb{R}^m_+$ gegeben, was in allen Lagern der Praxis der Fall sein dürfte. Wir nehmen der Einfachheit halber an, daß bestellte Waren unmittelbar nach der Bestellung im Lager verfügbar sind.
Mit

$x_i := (x_i^1,\ldots,x_i^m)'$ soll der Bestand zu Beginn der i-ten Periode vor jeder Bestellung,

mit

$y_i := (y_i^1,\ldots,y_i^m)'$ der Bestand zu Beginn der i-ten Periode nach erfolgter Bestellung gemeint sein.

Auf $\mathbb{R}^m$ sei die folgende Halbordnung gegeben, wobei $x^j$, $j \in \{1,\ldots,m\}$, die j-te Komponente von $x \in \mathbb{R}^m$ bedeute; für $0 \in \mathbb{R}$ und $0 \in \mathbb{R}^m$ verwenden wir dasselbe Zeichen.

1.1 Definition:

Seien $x,y \in \mathbb{R}^m$, dann heißt

(1) $x \ge 0 \quad :\Longleftrightarrow \quad \bigwedge_{1 \le i \le m} x^i \ge 0$ ,

(2) $x > 0 \quad :\Longleftrightarrow \quad x \ge 0$ und $x \ne 0$ ,

(3) $x>>0 \quad : \iff \bigwedge_{1\le i\le m} x^i>0$ .

(4) Für $\Delta\in\{\ge,>,>>\}$ sei $x\Delta y$ definiert durch $x-y\Delta 0$ .

Wir verwenden weitere Abkürzungen gemäß

1.2 Definition:

Für $a,b\in\mathbb{R}^m$ seien

(1) $[a,b] \quad := \{x\in\mathbb{R}^m \mid a\le x\le b\}$ ,

(2) $(a,b] \quad := \{x\in\mathbb{R}^m \mid a<<x\le b\}$ ;

(3) für $A\subset\mathbb{R}^m$ sei $A_b := A\cap\{x\in\mathbb{R}^m \mid x\le b\}$ ;

(4) $\mathfrak{B}^m_b := \mathfrak{B}^m\cap\mathbb{R}^m_b$ , $\mathfrak{B}^m$ m-dimensionaler Borel-Körper;

(5) für $A\subset\mathbb{R}^m_b$ sei das Komplement in $\mathbb{R}^m_b$ kurz mit $A^c$ anstelle von $A^c_b$ bezeichnet.

1.3 Das Lager sei durch folgende Größen charakterisiert:

(1) Eine meßbare Abbildung $v_i : \mathbb{R}^m_{b_i} \times \mathbb{R}^m_+ \to \mathbb{R}^m_{b_{i+1}}$ , $1\le i\le N$ ,

gibt für $y_i\in\mathbb{R}^m_{b_i}$ und $t\in\vartheta_i$ mit $v_i(y_i,t)$ den Lagerbestand am Ende der i-ten Periode an, kurz $x_{i+1} = v_i(y_i,t)$.

(2) Seien $c_i\in\mathbb{R}^m_+$ , $K_i\in\mathbb{R}_+$ , $1\le i\le N$ ; für $z\in\mathbb{R}^m$ sei

$$\delta(z) := \begin{cases} 1 , & z\neq 0 \\ 0 , & z=0 \end{cases}$$

und $c_i(z) := K_i\delta(z)+c_i'z$ gebe für $z\ge 0$ die Bestellkosten der i-ten Periode an, falls die Größe z bestellt wird.

(3) Eine meßbare Abbildung $l_i : \mathbb{R}^m_{b_i} \times \mathbb{R}^m_+ \to \mathbb{R}_+$ , $1\le i\le N$ ,

gibt für $y_i\in\mathbb{R}^m_{b_i}$ und $t\in\vartheta_i$ mit $l_i(y_i,t)$ die Lagerungs- und Fehlmengenkosten in der i-ten Periode bei Nachfrage $D_i=t$ an.

Mit $L_i(y) := \int l_i(y,t)\,d\Phi_i(t)$ gibt $L_i(y_i)$ die mittleren Lagerungs- und Fehlmengenkosten in der i-ten Periode an.

(4) Wir nehmen an, daß nach Ablauf von N Perioden der Bestand $x_{N+1}$ einen Erlös von $w(x_{N+1}) := c'_{N+1}x_{N+1} - h(x_{N+1})$, $c_{N+1} \geq 0$, erbringt, wobei h einer Wertminderung entspricht. Negativer Bestand führt zu Fehlmengenkosten.

(5) $0 < \alpha_i \leq 1$ ist ein Diskontfaktor mit dem zukünftige Kosten diskontiert werden.

Das Lager soll in folgender Weise kontrolliert werden:
Zu Beginn jeder Periode wird der aktuelle Lagerbestand festgestellt und aufgrund dieses Wertes muß entschieden werden, ob der Lagerbestand durch eine Auffüllung angehoben werden soll oder nicht.
Im Falle einer Lagerauffüllung muß die Bestellmenge festgelegt werden.
Diese Entscheidung liefert eine Markoffsche Auffüllpolitik.

1.4 Definition:
Eine Markoffsche Auffüllpolitik f für N Stufen ist eine endliche Folge $(f_1,\ldots,f_N)$ von meßbaren Abbildungen

$$f_i : \mathbb{R}^m_{b_i} \to \mathbb{R}^m_{b_i}, \quad 1 \leq i \leq N, \text{ mit } f_i(x) - x \geq 0, \; x \in \mathbb{R}^m_{b_i};$$

$f_i$ heißt dabei einstufige Auffüllpolitik für die Periode i.

Als Abkürzung für die Menge der N-stufigen Auffüllpolitiken verwenden wir $\mathbb{F}^N$.

Folgt man einer Politik $f = (f_1,\ldots,f_N) \in \mathbb{F}^N$, d.h.: bestellt man zu Beginn der i-ten Periode gerade $f_i(x_i) - x_i$ und füllt damit den Bestand auf $y_i = f_i(x_i)$ auf, so ergeben sich bei einem Anfangsbestand $x_1$ die zu erwartenden Gesamtkosten $c^N(x_1,f)$ als Erwartungswert von

$$\sum_{i=1}^{N} \beta_i \left[K_i \cdot \delta(y_i - x_i) + c_i'(y_i - x_i) + l_i(y_i, D_i)\right]$$

$$- \beta_{N+1}\left[c_{N+1}' \, x_{N+1} - h(x_{N+1})\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \beta_i \left[K_i \cdot \delta(y_i - x_i) + c_i' y_i - \alpha_i c_{i+1}' x_{i+1} + l_i(y_i, D_i)\right]$$

$$+ \beta_{N+1} \cdot h(x_{N+1}) - c_1' x_1$$

mit $\beta_1 := 1$ und $\beta_i := \prod_{j=1}^{i-1} \alpha_j$ für $i>1$

Ziel folgender Überlegungen ist es, eine Auffüllpolitik $f^* = (f_1^*, \ldots, f_N^*)$ anzugeben mit der Eigenschaft

$$c^N(x_1, f^*) = \inf_{f \in \mathbb{F}^N} c^N(x_1, f) \qquad \forall \; x_1 \in \mathbb{R}^m_{b_1}$$

In §2 wird ein Optimalitätsbegriff formuliert, der insbesondere die obige Eigenschaft hat.

## § 2 Das dynamische Entscheidungsmodell

Zur Beschreibung der in §1 geschilderten Situation bietet sich ein (instationäres) stochastisches Entscheidungsmodell mit endlichem Horizont im Sinne von HINDERER (70) an. Da Kostenfunktionen im Vordergrund stehen, formulieren wir das Modell direkt passend für eine Minimumaufgabe.
Das Modell ist gegeben durch ein Tupel

2.1 $((S_n,\gamma_n),(A_n,\mathcal{O}_n),(D_n),p,(q_n),(r_n),V^0)$ ,

und die einzelnen Größen haben dabei für $1\leq n\leq N$ speziell die folgende Bedeutung:

(1) Der Zustandsraum $(S_n,\gamma_n)$ und der Aktionenraum $(A_n,\mathcal{O}_n)$ sind aufgrund unserer Annahmen gegeben durch $(\mathbb{R}^m_{b_n},\mathcal{B}^m_{b_n})$.

(2) Die Abbildungen $D_n : S_n \to \mathcal{P}'(A_n)$ geben die zulässigen Aktionen $D_n(s)$ zur Zeit n an, wenn das System im Zustand $s\in S_n$ ist. Wir wählen $D_n(s) := [s,b_n]$ für $s\in S_n$.

(3) p ist eine Startverteilung auf $S_1$; wir wählen

$$p(\{x\}) := \begin{cases} 1 , & x=x_1 \\ 0 , & x\neq x_1 \end{cases} .$$

(4) Sei $K_n := \{(s,a)\,|\,s\in S_n, a\in D_n(s)\}$; das Bewegungsgesetz $(q_n)$ ist eine Folge von Übergangswahrscheinlichkeiten von $K_n$ nach $S_{n+1}$. $q_n(s,a,\cdot)$ gibt die Verteilung des Zustandes des Systems zur Zeit n+1 an, wenn es zur Zeit n im Zustand s ist und man die zulässige Aktion a ergreift. Wir legen $q_n$ nun wie folgt fest:

Die Verteilungsfunktion $\Phi_n(\lambda_1,\ldots,\lambda_m)$ erzeugt ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathcal{B}^m_+$, das wir ebenfalls mit $\Phi_n$ bezeichnen.

Für die meßbare Abbildung $v_n : \mathbb{R}^m_{b_n} \times \mathbb{R}^m_+ \to \mathbb{R}^m_{b_{n+1}}$

sei $v_{n,a}(t) := v_n(a,t)$ für $a \in \mathbb{R}^m_{b_n}$, $t \in \mathbb{R}^m_+$;

wir definieren dann

$$q_n(s,a,B) := \Phi_n(v_{n,a}^{-1}(B))$$

für $(s,a) \in K_n$ und $B \in \gamma_{n+1}$.

(5) Die Kostenfunktionen $(r_n)$ sind auf $K_n$ definiert und geben die Kosten im Intervall $(n,n+1]$ an. Gemäß unserer Annahmen in §1 wählen wir

$$r_n(s,a) := K_n \cdot \delta(a-s) + c_n'(a-s) + L_n(a) .$$

(6) $V^0$ ist die sogenannte terminale Funktion, die im hier vorliegenden Fall gegeben ist durch $-w$ (vgl. 1.3 (4)).

Durch die Lagerdeterminanten ist somit das Entscheidungsmodell vollständig beschrieben und es muß nun noch ein Optimalitätskriterium präzisiert werden.

2.2 Definition:
Für $1 \le i \le N$ seien $V_i$ die minimalen bedingten erwarteten Kosten für die Perioden $i,\ldots,N$ bei Vorliegen der Vergangenheit $(x_1,y_1,\ldots,y_{i-1},x_i)$.

2.3 Bemerkung:
Aufgrund des markoffschen Charakters des oben angegebenen Modells wissen wir (siehe HINDERER (70), §18)

(a) $V_i$ hängt von der Vorgeschichte $(x_1,y_1,\ldots,y_{i-1},x_i)$ nur über $x_i$ ab,

(b) um die erwarteten Gesamtkosten zu minimieren reicht es, das System mit N-stufigen deterministischen Markoffplänen zu steuern.

Im folgenden sollen aber nicht nur die erwarteten Gesamtkosten durch Wahl eines Planes minimiert werden, sondern es soll der schärfere Begriff der sogenannten "starken" Optimalität benutzt werden. Zur Festlegung dieses

Begriffes benötigen wir

2.4 Definition:

Für $1 \leq i \leq N$ und einen Plan $f = (f_1, \ldots, f_N)$ seien $V_{if}$ die bedingten erwarteten Kosten für die Perioden $i, \ldots, N$ bei Vorliegen der Vorgeschichte $(x_1, y_1, \ldots, y_{i-1}, x_i)$ und Verwendung des Planes f; weiter sei

$V_{N+1,f} := h - \tilde{c}_{N+1}$ (siehe 2.6)

Für N-stufige deterministische Markoffpläne gilt nun

2.5 Definition:

Ein Plan $f = (f_1, \ldots, f_N)$ heißt stark optimal genau dann, wenn für $i=1, \ldots, N$ gilt : $V_i = V_{if}$ .

Um handliche Kriterien für die Optimalität von Plänen zur Verfügung zu haben, führt man die Operatoren $T_i$, $T_{if}$ und $U_i$ ein.

2.6 Definition:

Sei $1 \leq i \leq N$ und $V : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ eine meßbare Funktion, für die die folgenden Ausdrücke definiert sind. Seien $x, y, t, c \in \mathbb{R}^m$ und

$$\tilde{c}(x) := c'x ,$$

$$T_i V(x,y) := K_i \delta(y-x) + \tilde{c}_i(y-x) + L_i(y) + \alpha_i \int V(v_i(y,t)) d\Phi_i(t) ,$$

$$T_{if} V(x) := T_i V(x, f(x)) \quad \text{falls f einstufiger Plan} ,$$

$$U_i V(x) := \inf_{y \in D_i(x)} T_i V(x,y) ,$$

$$V_{N+1}(x) := h(x) - \tilde{c}_{N+1}(x) .$$

Der Zusammenhang zwischen $V_i$ und $V_{i+1}$ wird für $1 \leq i \leq N$ mittels $U_i$ gegeben durch die sogenannte Optimalitäts-gleichung (siehe HINDERER (70), §14)

2.7 $$V_i = U_i V_{i+1} ,$$

mit dessen Hilfe sich nun Optimalitätskriterien für stark optimale Pläne angeben lassen. Es gilt

2.8 Satz: (vergleiche etwa SCHÄL (75b))

$\bigwedge_{1\le i\le N} T_{if_i}V_{i+1} = U_iV_{i+1} \Leftrightarrow f = (f_1,\dots,f_N)$ ist ein stark optimaler Plan .

Wir wollen das Modell nun (nach einer Idee von VEINOTT (66)) auf den Fall $c_i=0$ zurückführen und legen dazu fest

2.9 Definition:

Für $y\in \mathbb{R}^m_{b_i}$ und $i=1,\dots,N$ sei

$$G_i(y) := \tilde{c}_i(y)-\alpha_i\tilde{c}_{i+1}(\int v_i(y,t)d\Phi_i(t))+L_i(y) .$$

$G_i(y)$ läßt sich für $i<N$ interpretieren als die erwarteten variablen Kosten der Periode i für einen Anfangsbestand von Null Einheiten vor der Entscheidung, einen Startbestand in der Periode i von y Einheiten nach der Entscheidung und für einen Wert der nicht abgerufenen Güter am Ende der Periode i von $\alpha_i c^j_{i+1}$ für das j-te Produkt.

Für $i=N$ gilt dieselbe Interpretation, falls nur $h=0$ ist.

Passend zu 2.9 modifizieren wir die Operatoren $T_i$, $T_{if}$ und $U_i$ durch

2.10 Definition: (vergleiche SCHÄL (75b))

Sei $1\le i\le N$ und $V : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ eine meßbare Funktion, für die die folgenden Ausdrücke definiert sind, $x,y\in \mathbb{R}^m_{b_i}$ und

$$T^*_iV(x,y) := K_i\delta(y-x)+G_i(y)+\alpha_i\int V(v_i(y,t))d\Phi_i(t) ,$$

$$T^*_{if_i}V(x) := T^*_iV(x,f_i(x)) \text{ falls } f_i \text{ einstufiger Plan} ,$$

$$U^*_iV(x) := \inf_{y\in D_i(x)} T^*_iV(x,y) ,$$

$$V^*_{N+1}(x) := h(x) ,$$

$$V^*_i(x) := U^*_i\dots U^*_Nh(x) .$$

Der Zusammenhang zwischen gesternten und ungesternten Operatoren läßt sich ablesen aus:

2.11 Lemma: (vergleiche SCHÄL (75b))

Für $1 \le i \le N$ und V wie in 2.10 gilt

(1) $T_i(V-\tilde{c}_{i+1})(x,y) = T_i^* V(x,y) - \tilde{c}_i(x)$ ,

(2) $T_{if_i} \ldots T_{Nf_N}(h-\tilde{c}_{N+1}) = T^*_{if_i} \ldots T^*_{Nf_N} h - \tilde{c}_i$ ,

(3) $U_i \ldots U_N(h-\tilde{c}_{N+1}) = U_i^* \ldots U_N^* h - \tilde{c}_i$ .

Um Optimalität von Plänen mit Hilfe der gesternten Operatoren charakterisieren zu können, formulieren wir

2.12 Lemma:

Sei $f=(f_1,\ldots,f_N)$ N-stufiger Plan, dann gilt

$$\bigwedge_{1\le i\le N} T_{if_i} V_{i+1} = U_i V_{i+1} \iff \bigwedge_{1\le i\le N} T^*_{if_i} V^*_{i+1} = U_i^* V_{i+1}^* .$$

Damit gilt dann mit 2.8

2.13 Satz: (vergleiche SCHÄL (75b))

$$\bigwedge_{1\le i\le N} T^*_{if_i} V^*_{i+1} = U_i^* V_{i+1}^* \iff f=(f_1,\ldots,f_N) \text{ ist stark optimaler Plan}$$

Die Beweise zu 2.11 und 2.12 können etwa induktiv geführt werden.

## § 3 Unimodal erzeugte Funktionen und Bedingungen für die Optimalität verallgemeinerter (s,S)-Politiken

Für die weiteren Überlegungen ist neben der K-Isotonie, die wohl auf PORTEUS zurückgeht, der Begriff einer unimodal erzeugten Funktion wesentlich.
Die Rolle der unimodalen Funktion bei Einproduktlagern übernimmt im hier angegebenen Mehrproduktlagermodell die unimodal erzeugte Funktion.
Zwischen unimodalen und unimodal erzeugten Funktionen besteht ein enger Zusammenhang (vergleiche 3.12) und im eindimensionalen Fall gehen beide Begriffe ineinander über.

3.1 Definition:

Sei $V : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, dann heißt

(1) $V$ isoton $:\Leftrightarrow \bigwedge_{x,y\in \mathbb{R}^m} x\leq y \Rightarrow V(x)\leq V(y)$ ,

(2) $V$ streng isoton $:\Leftrightarrow \bigwedge_{x,y\in \mathbb{R}^m} x<y \Rightarrow V(x)<V(y)$

(3) $V$ (streng) antiton $:\Leftrightarrow -V$ (streng) isoton .

3.2 Beispiele:

$V(x) := a \in \mathbb{R}$ ist isoton , aber nicht streng isoton ,

$V(x) := \sum_{i=1}^{m} x^i$ ist streng isoton.

3.3 Definition: (vergleiche PORTEUS (71))

Sei $V : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ und $K \in \mathbb{R}_+$; dann heißt

$V$ K-isoton $:\Leftrightarrow \bigwedge_{x,y\in R^m} x\leq y \Rightarrow V(x)\leq V(y)+K$

3.4 Beispiele:

Jede isotone Abbildung ist K-isoton für $K \in \mathbb{R}_+$;

$V(x) := \begin{cases} 0, & x\geq 0 \\ & \\ 1, & x\not\geq 0 \end{cases}$ ist K-isoton für $K\geq 1$, aber nicht isoton.

3.5 Definition:

Sei I Intervall in $\mathbb{R}$ und $F:I\to\mathbb{R}$, dann heißt F unimodal auf I : $\Leftrightarrow$ es gibt $\xi\in I$ mit der Eigenschaft

(1) $\bigwedge_{x,y\in I} \xi\le x\le y \Rightarrow F(\xi)\ge F(x)\ge F(y)$ ,

(2) $\bigwedge_{x,y\in I} x\le y\le\xi \Rightarrow F(x)\le F(y)\le F(\xi)$ .

$\xi$ heißt ein Modalpunkt von F auf I.

3.6 Definition:

Sei I Intervall in $\mathbb{R}$ und $F:I\to\mathbb{R}$, dann heißt F quasi-konkav auf I : $\Leftrightarrow$

$$\bigwedge_{x,y\in I,\ x\le y}\ \bigwedge_{z\in I} x\le z\le y \Rightarrow F(z)\ge\min\{F(x),F(y)\} .$$

Wie man leicht sieht, gilt folgende Äquivalenz:

3.7 Lemma:

$$\left.\begin{array}{l}F \text{ unimodal auf } I\\ \text{mit Modalpunkt } \xi\end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}F \text{ quasi-konkav auf } I\\ \text{und } F(\xi)=\max\{F(x)\,|\,x\in I\}\end{array}\right. .$$

3.8 Definition:

Sei $b_i\in\mathbb{R}^m$, $i\in\mathbb{N}$, und $l\in\mathbb{R}^m_{b_i}$ ; wir legen folgende Abkürzungen fest:

$$Q_{+i}(l) := \mathbb{R}^m_{b_i}\cap\{x\,|\,x\ge l\} ,$$

$$Q_{-i}(l) := \mathbb{R}^m_{b_i}\cap\{x\,|\,x\le l\} ,$$

$$Q_{\ i}(l) := \mathbb{R}^m_{b_i}\setminus(Q_{+i}(l)\cup Q_{-i}(l)) .$$

Hängt $b_i$ nicht von i ab, sagen wir kurz $Q$, $Q_+$, $Q_-$ .

3.9 Definition:

Für $a \in \mathbb{R}^m$ sei die Abbildung $p_a : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ definiert durch

$p_a(x) := (\max(x^1,a^1),\ldots,\max(x^m,a^m))'$

Unmittelbar klar ist

3.10 Lemma:

Für $a,c,x \in \mathbb{R}^m_b$ und $a \leq c$ gilt:

(1) $p_a(x) \leq p_c(x)$ ,

(2) $p_c(p_a(x)) = p_c(x)$ ,

(3) $x \leq c \Rightarrow p_a(x) \leq c$ ,

(4) $p_a(x) \geq a$ , $p_a(x) \geq x$ .

Wir kommen nun zur angekündigten

3.11 Definition:

Sei $b \in \mathbb{R}^m$ und $F : \mathbb{R}^m_b \to \mathbb{R}$, dann heißt

F unimodal erzeugt : $\Longleftrightarrow$ es gibt $\xi \in \mathbb{R}^m_b$ mit

(1) $\bigwedge_{x,y \in \mathbb{R}^m_b} \xi \leq x \leq y \Rightarrow F(\xi) \geq F(x) \geq F(y)$ ,

(2) $\bigwedge_{x,y \in \mathbb{R}^m_b} x \leq y \leq \xi \Rightarrow F(x) \leq F(y) \leq F(\xi)$ ,

(3) $\bigwedge_{x \in Q(\xi)} \bigwedge_{x \leq z \leq p_\xi(x)} F(x) \leq F(z)$ .

Wir nennen $\xi$ Modalpunkt von F.

Den Zusammenhang zu unimodalen Funktionen liefert

3.12 Satz:

Seien $g^i : (-\infty,b^i] \to \mathbb{R}$ unimodal auf $(-\infty,b^i]$, $i=1,\ldots,m$ ,

$T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ isoton und $b := (b^1,\ldots,b^m)$. Für die Abbildung $G : \mathbb{R}^m_b \to \mathbb{R}$ mit

$$G(x) := T((g^1(x^1),\ldots,g^m(x^m))')$$

gilt: G ist unimodal erzeugt.

Beweis:
Durch die unimodalen Funktionen $g^i$ ist ein Punkt $\xi := (\xi^1,\ldots,\xi^m)'$ ausgezeichnet, und man überlegt sich leicht, daß G mit $\xi$ als Modalpunkt die Eigenschaften (1) - (3) aus 3.11 hat. ∎

Wir formulieren nun die Generalvoraussetzungen für Kapitel II:

(i) a) $v_i(\cdot,t)$ ist isoton für $t\in\mathcal{T}_i$, $i=1,\ldots,N$,

b) $v_i(y,t)\le y$, $t\in\mathcal{T}_i$, $y\in \mathbb{R}^m_{b_i}$, $i=1,\ldots,N$,

(ii) a) $v_i(\cdot,t)$ ist stetig für $t\in\mathcal{T}_i$, $i=1,\ldots,N$,

b) $G_i(\cdot)$ ist stetig, $i=1,\ldots,N$,

c) $h(\cdot)$ ist stetig,

(iii) a) $\int v_i(y,t)^j d\Phi_i(t) > -\infty$, $y\in \mathbb{R}^m_{b_i}$, $i=1,\ldots,N$; $j=1,\ldots,m$,

b) $\int |h(v_N(y,t))| d\Phi_N(t) < \infty$, $y\in \mathbb{R}^m_{b_N}$,

(iv) a) $\alpha_i \cdot K_{i+1} \le K_i$, $i=1,\ldots,N$ mit $K_{N+1} := \dfrac{K_N}{\alpha_N}$,

b) $b_i \le b_{i+1}$, $i=1,\ldots,N$ mit $b_{N+1} := b_N$,

(v) $\lim\limits_{x\to-\infty} G_i(x) = +\infty$, $i=1,\ldots,N$, d.h.:

$$\bigwedge_{1\le i\le N} \bigwedge_{M} \bigvee_{a_{M,i}\in \mathbb{R}^m_{b_i}} \bigwedge_{x\in \mathbb{R}^m_{b_i}} (x\not\ge a_{M,i} \Rightarrow G_i(x) > M),$$

(vi) a) $-G_i(\cdot)$ ist unimodal erzeugt mit Modalpunkt $\xi_i \le b_i$, $i=1,\ldots,N$,

b) $\xi_i \le \xi_{i+1}$, $i=1,\ldots,N-1$,

c) $\xi_{N+1} := \xi_N$,

(vii) Für $1 \le i \le N$ und $x \in \mathbb{R}^m_{b_i}$ gelte

$$x \le z \le p_{\xi_i}(x) \Rightarrow v_i(z,t) \le p_{\xi_{i+1}}(v_i(x,t)) \qquad *) \quad ,$$

(viii) a) h ist $K_{N+1}$-isoton ,

b) h ist antiton auf $\{x \mid x \not\ge \xi_{N+1}\}$ ,

(ix) $L_i(x) < \infty$, $x \in \mathbb{R}^m_{b_i}$, $i=1,\dots,N$ .

*) Wesentlich an (vii) ist die Forderung für den Fall $x \in Q_i(\xi_i)$. Für $x \in Q_{+i}(\xi_i)$ erfüllen alle Funktionen die Bedingung, für $x \in Q_{-i}(\xi_i)$ sind für die Gültigkeit von (vii) die Voraussetzungen (i) und (vib,c) hinreichend. Setzt man (ia) voraus, dann ist (vii) äquivalent zu $v_i(p_{\xi_i}(x),t) \le p_{\xi_{i+1}}(v_i(x,t))$ für $x \in \mathbb{R}^m_{b_i}$, $i=1,\dots,N$.

Wir schließen einige Bemerkungen zu den Voraussetzungen an:

3.13 In der Theorie der Lagerhaltung sind wohl $v(x,t)=x-t$ und $v(x,t)=(x-t)^+ := \max(x-t,0)$ die bekanntesten Beispiele für die Funktionen $v_i(\cdot,\cdot)$. Das erste läßt sich als ein Lager mit Vormerkung, das zweite als ein Lager ohne Vormerkung auffassen. Weitere Beispiele findet man etwa bei VEINOTT (66). Im Gegensatz zu (i) oder (iia) erscheint Voraussetzung (vii) etwas künstlich und wir zeigen deshalb, daß sie nicht sehr stark ist und in jedem Fall von den oben genannten Beispielen für $v_i(\cdot,\cdot)$ unter schwachen Zusatzvoraussetzungen erfüllt wird.

3.14 Lemma:

Seien $w^k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $k=1,\dots,m$, Abbildungen mit den Eigenschaften

(a) $w^k$ ist isoton

(b) $w^k(x) \leq x$

und gelte (vib,c), (ivb), dann ist auf $\mathbb{R}^m_{b_i}$ für

$$v(x,t) := (w^1(x^1-t^1),\dots,w^m(x^m-t^m))'$$

Voraussetzung (vii) erfüllt und überdies gilt (i).

Auf den rein technischen Beweis soll verzichtet werden. Auf $v(x,t)=x-t$ ist 3.14 unmittelbar anwendbar, auf ein Lager ohne Vormerkung, indem man zusätzlich beachtet, daß der Lagerbestand in diesem Fall nicht-negativ ist.

Für eine vollständige Fallunterscheidung ist die folgende Aussage nützlich, die man indirekt beweist:

3.15 Falls (ib), (ivb) und (vib) erfüllt sind, gilt:

$$x \in Q_i(\xi_i) \Rightarrow v_i(x,t) \in Q_{i+1}(\xi_{i+1}) \cup Q_{-(i+1)}(\xi_{i+1})$$

Aus den Stetigkeitsvoraussetzungen läßt sich unmittelbar gewinnen

3.16 Lemma:
Sei $i \in \{1,\dots,N\}$, $j \in \{1,\dots,m\}$ und gelte (i), (iia), (iiia), dann folgt

(1) $\int v_i(x,t)^j d\Phi_i(t)$ ist stetig in $x \in \mathbb{R}^m_{b_i}$,

(2) $G_i$ stetig $\Leftrightarrow$ $L_i$ stetig.

3.17 Voraussetzung (vib) erhält man, falls für $t \in \vartheta_i$ $v_i(\xi_i,t) \leq \xi_{i+1}$ , $i=1,\dots,N-1$ , $0 \in \vartheta_i$ und $v_i(x,0) = x$ gefordert wird.

3.18 Aus Voraussetzung (v) folgt u.a., wie in 4.15 gezeigt wird, daß es nicht optimal ist, das Lager nie aufzufüllen.

3.19 Wie die Ausführungen 3.5 - 3.12 zeigen, kann Bedingung (via) so interpretiert werden, daß G sich isoton aus den entsprechenden Abbildungen des eindimensionalen Falles zusammensetzt, beispielsweise also durch

$$G(x) = \sum_{j=1}^{m} \tilde{G}_j(x^j) \ .$$

In den folgenden Paragraphen des Kapitels II setzen wir stets voraus, daß (i) - (ix) erfüllt sind.

## § 4 Die Bedingungen $(A_i)$ und $(B_i)$ als Vorbereitung für den Optimalitätsbeweis

Wir stellen im folgenden Eigenschaften des Modells bereit, die die Existenz von optimalen verallgemeinerten (s,S) - Politiken garantieren. Dabei sind folgende Abkürzungen nützlich:

4.1 Definition: ( vergleiche SCHÄL (75b))

Für $1 \le i \le N$, $x,y \in \mathbb{R}^m_{b_i}$ legen wir fest:

$$R_i(y) := \int V^*_{i+1}(v_i(y,t))\,d\Phi_i(t),$$

$$J_i(y) := G_i(y) + \alpha_i R_i(y),$$

$$H_i(x) := \inf\{K_i + J_i(y) \mid b_i \ge y > x\},$$

$$O_i := \{x \in \mathbb{R}^m_{b_i} \mid J_i(x) \le H_i(x)\}.$$

Aufgrund der angegebenen Voraussetzungen ist $R_i(x)$ wohldefiniert (vergleiche 5.7). Den Zusammenhang zwischen J, H und den Operatoren aus §2 zeigen

4.2 Lemma: (vergleiche SCHÄL (75b))

Für $1 \le i \le N$ gilt $U_i^* V_{i+1}^* = \min\{J_i, H_i\}$.

und

4.3 Lemma: (vergleiche SCHÄL (75b))

Für $1 \le i \le N$ und $x \in \mathbb{R}^m_{b_i}$ gilt:

$$x \in O_i \iff \inf\{T_i^* V_{i+1}^*(x,y) \mid y \in D_i(x)\} = T_i^* V_{i+1}^*(x,x).$$

Wir verzichten auf die einfachen Beweise und notieren, daß optimale Auffüllpolitiken auf der Menge $O_i$ als Identität gewählt werden können, so daß die Aufgabe, eine optimale Politik zu bestimmen, sich reduziert auf die Aufgabe: Bestimme eine optimale Politik auf $O_i^c$ .
Wir halten dies fest in

4.4 Lemma:
Sei $x \in O_i$, $1 \le i \le N$, und $f_i: \mathbb{R}^m_{b_i} \to \mathbb{R}^m_{b_i}$ seien meßbare Abbildungen mit $f_i|_{O_i} \equiv Id$ , dann gilt: $T_{if_i}^* V_{i+1}^*(x) = U_i^* V_{i+1}^*(x)$.

Liegt ein Lagerbestand $x \in O_i$ vor, dann ist es also optimal, den Lagerbestand nicht aufzustocken ( vergleiche 2.13 ).
Für spätere Überlegungen erinnern wir an das folgende Lemma, das wir ohne Beweis angeben.

4.5 Lemma:
$J_i$ stetig, $i \in \{1,\dots,N\} \Rightarrow \inf_{b_i \ge y > x} J_i(y) = \inf_{b_i \ge y \ge x} J_i(y)$ .

4.6 Definition:
Sei $1 \le i \le N$; wir sagen Bedingung $(A_i)$ ist erfüllt genau dann, wenn gilt:

(1) $V_{i+1}^*$ ist $K_{i+1}$-isoton auf $\mathbb{R}^m_{b_i}$ ,

(2) $V_{i+1}^*$ ist stetig auf $\mathbb{R}^m_{b_i}$ .

4.7 Lemma:
Wenn Bedingung $(A_i)$ erfüllt ist, $1 \le i \le N$, dann gilt

(1) $R_i$ ist $K_{i+1}$-isoton auf $\mathbb{R}^m_{b_i}$ ,

(2) $J_i$ ist stetig auf $\mathbb{R}^m_{b_i}$ ,

(3) $H_i$ ist stetig auf $\mathbb{R}^m_{b_i}$ ,

(4) $\{x \in \mathbb{R}^m_{b_i} \mid x \ge \xi_i\} \subset O_i$ .

Beweis:
Gelte Bedingung $(A_i)$ und sei $x \le z \le b_i$; nach (ia) gilt für $t \in \vartheta_i$ $v_i(x,t) \le v_i(z,t)$ und mit $(A_i 1)$ ergibt sich (1). Nach (iib) ist $G_i$ stetig, die Stetigkeit von $R_i$ folgt aus dem Sat über die dominierte Konvergenz, so daß (2) gilt.
Zum Nachweis von (3) reicht es wegen 4.5 und 4.7(2) die

Stetigkeit von $I(x) := \inf \{J_i(y) \mid b_i \geq y \geq x\}$ zu zeigen; diese folgt aus einem Korollar in HILDENBRAND(74), Seite 30, falls die folgenden beiden Bedingungen erfüllt sind:

4.8 G offen $\Rightarrow$ $X_G := \{x \in \mathbb{R}^m_{b_i} \mid [x,b_i] \subset G\}$ offen

4.9 F abgeschlossen $\Rightarrow$ $X_F$ abgeschlossen.

Die Gültigkeit von 4.8 folgt aus 6.1; Beweisidee zu 4.9: Für $x_n \in X_F$ mit $x_n \to x_\infty$ ist $[x_\infty, b_i] \subset F$ zu zeigen. Wegen $x_\infty, b_i \in F$ reicht es für $y \in (x_\infty, b_i)$, eine geeignete Folge $y_n \in [x_n, b_i] \subset F$ mit $\lim_{n\to\infty} y_n = y$ zu wählen, woraus dann wegen der Abgeschlossenheit von F $y \in F$ folgt und somit die Gültigkeit von 4.9.

Sei $1 \leq i \leq N$ und $\xi_i \leq x < y \leq b_i$, dann gilt nach (via), 4.7(1) u. (iva)

$J_i(x) = G_i(x) + \alpha_i R_i(x) \leq G_i(y) + \alpha_i (R_i(y) + K_{i+1}) \leq J_i(y) + K_i$

und somit $J_i(x) \leq \inf_{b_i \geq y > x} \{J_i(y) + K_i\} = H_i(x)$, also $x \in O_i$ .

∎

4.10 Bemerkung:
Ist Bedingung $(A_i)$ erfüllt, dann ist $O_i$ wegen 4.7 (2),(3) abgeschlossen.

4.11 Definition:
Für $1 \leq i \leq N$ sagen wir, daß Bedingung $(B_i)$ erfüllt ist genau dann, wenn gilt:

(1) $V^*_{i+1}$ ist antiton auf $\{z \mid z \leq \xi_{i+1}\}$ ,

(2) $x \in Q_{i+1}(\xi_{i+1}) \Rightarrow \bigwedge_{x \leq z \leq p_{\xi_{i+1}}(x)} V^*_{i+1}(x) \geq V^*_{i+1}(z)$ .

4.12 Lemma:
Sind die Bedingungen $(A_i)$ und $(B_i)$ erfüllt, $1 \leq i \leq N$, dann hat $R_i$ die folgenden Eigenschaften:

(1) $\xi_i \leq x \leq y \leq b_i \Rightarrow R_i(x) \leq R_i(y) + K_{i+1}$ ,

(2) $x \leq y \leq \xi_i \Rightarrow R_i(x) \geq R_i(y) \geq R_i(\xi_i)$ ,

(3) $x \in Q_i(\xi_i) \Rightarrow \bigwedge_{x \leq z \leq p_{\xi_i}(x)} R_i(x) \geq R_i(z)$ .

Beweis:
(1) gilt nach 4.7 (1); für $x \le y \le \xi_i$ gilt wegen (i) und (vib) $v_i(x,t) \le v_i(y,t) \le v_i(\xi_i,t) \le \xi_i \le \xi_{i+1}$ und mit $(B_i 1)$ folgt $V^*_{i+1}(v_i(x,t)) \ge V^*_{i+1}(v_i(y,t)) \ge V^*_{i+1}(v_i(\xi_i,t))$ und damit $R_i(x) \ge R_i(y) \ge R_i(\xi_i)$; zu (3): sei $x \in Q_i(\xi_i)$ und $x \le z \le p_{\xi_i}(x)$; nach 3.15 können nur Fall 1: $v_i(x,t) \in Q_{i+1}(\xi_{i+1})$ und Fall 2: $v_i(x,t) \in Q_{-(i+1)}(\xi_{i+1})$ eintreten; zu1): wegen $v_i(x,t) \le v_i(z,t) \le p_{\xi_{i+1}}(v_i(x,t))$ folgt mit $(B_i 2)$ $V^*_{i+1}(v_i(x,t)) \ge V^*_{i+1}(v_i(z,t))$; zu 2): wegen $v_i(x,t) \le v_i(z,t) \le \xi_{i+1}$ nach (vii) folgt mit $(B_i 1)$ wieder $V^*_{i+1}(v_i(x,t) \ge V^*_{i+1}(v_i(z,t))$ und damit $R_i(x) \ge R_i(z)$. ∎

4.13 Korollar:
Sind die Bedingungen $(A_i)$ und $(B_i)$ erfüllt, $1 \le i \le N$, dann hat $J_i$ die folgenden Eigenschaften:

(1) $\xi_i \le x \le y \le b_i \Rightarrow J_i(x) \le J_i(y) + K_i$ ,

(2) $x \le y \le \xi_i \Rightarrow J_i(x) \ge J_i(y) \ge J_i(\xi_i)$ ,

(3) $x \in Q_i(\xi_i) \Rightarrow \bigwedge_{x \le z \le p_{\xi_i}(x)} J_i(x) \ge J_i(z)$ .

Der Beweis ergibt sich unmittelbar aus 4.12 und (via).

Nach 4.7 (2) ist $J_i$ stetig auf $\mathbb{R}^m_{b_i}$, falls Bedingung $(A_i)$, $1 \le i \le N$, erfüllt ist. Aufgrund von 4.13 wird für $x \in \mathbb{R}^m_{b_i}$ das Minimum von $J_i$ auf $[x,b_i]$ sogar schon auf $[x,b_i] \cap [\xi_i,b_i] = [p_{\xi_i}(x),b_i]$ angenommen, falls auch Bedingung $(B_i)$, $1 \le i \le N$, gilt.

4.14 Lemma:
Sei $1 \le i \le N$, $x \in \mathbb{R}^m_{b_i}$ und es mögen die Bedingungen $(A_i)$ und $(B_i)$ erfüllt sein; dann gilt:

$$\min \{J_i(y) \mid y \in [x,b_i]\} = \min \{J_i(y) \mid y \in [p_{\xi_i}(x),b_i]\}.$$

Beweis:
Wegen $p_{\xi_i}(x) \ge x$ gilt stets "$\le$"; sei $y \in [x,b_i]$, dann ist zu zeigen: es gibt $y' \in [p_{\xi_i}(x),b_i]$ mit $J_i(y) \ge J_i(y')$. Unter Beachtung von 4.13 erkennt man, daß $y' := p_{\xi_i}(y)$ das Gewünschte leistet.

∎

Es soll nun eine Eigenschaft der Menge $O_i$ angegeben werden, die insbesondere besagt, daß es nicht optimal ist, das Lager nie aufzufüllen.

4.15 Lemma:
Sei $1 \le i \le N$, mögen $(A_i)$ und $(B_i)$ gelten, dann gibt es $a_i \in \mathbb{R}^m_{b_i}$ mit $O_i \subset [a_i,b_i]$.

Beweis:
Sei $M := \max \{J_i(x) \mid x \in [\xi_i,b_i]\} - \min \{\alpha_i R_i(x) \mid x \in [\xi_i,b_i]\} + K_i$, dann gilt für $x \notin a_{M,i}$ gemäß (v) und unter Beachtung von $\alpha_i R_i(x) \ge \alpha_i R_i(p_{\xi_i}(x)) \ge \min \{\alpha_i R_i(y) \mid y \in [\xi_i,b_i]\}$ die folgende Abschätzung:

$$J_i(x) > M + \alpha_i R_i(x) \ge \min\{J_i(y) \mid y \in [x,b_i]\} + K_i = H_i(x).$$

∎

Hängt $b_i$ nicht von i ab, gilt also $b_i=b$, $i=1,\ldots,N$, dann gilt offensichtlich sogar

4.16 Lemma:
Sei $1\leq i\leq N$, $b_i=b$, dann gibt es $a\in \mathbb{R}_b^m$ mit $O_i\subset[a,b]$.

Wir notieren noch, daß a auch so gewählt werden kann, daß $O_i\subset(a,b]$ gilt. Dies hat zur Folge, daß für $x\geq a$ auch $p_a(x)\in(a,b]^c$ gilt. In §9 wird davon Gebrauch gemacht werden.

## § 5 Existenz und Struktur einer optimalen verallgemeinerten (s,S) - Politik

Im folgenden werden Pläne angegeben und mit Hilfe der Optimalitätskriterien aus §2 gezeigt, daß diese Pläne stark optimal für das angegebene Modell sind und als verallgemeinerte (s,S) - Politiken aufgefaßt werden können.
Zur Formulierung benötigen wir

5.1 Definition:
Für $x \in \mathbb{R}^m_{b_i}$ und $i \in \{1,\dots,N\}$ seien

(1) $D_i^*(x) := \{a \in [x,b_i] \mid T_i V_{i+1}(x,a) = U_i V_{i+1}(x)\}$ ,

(2) $W_i(x) := \{a \in [p_{\xi_i}(x), b_i] \mid J_i(a) = J_i(m_i(x))\}$ mit

(3) $m_i(x)$ Minimalpunkt von $J_i$ auf $[x,b_i]$, d.h.:
$J_i(m_i(x)) = \min \{J_i(y) \mid y \in [x,b_i]\}$ .

Gelten Bedingung $(A_i)$ und $(B_i)$, dann ist wegen 4.7 (2) und 4.14 gesichert, daß $W_i(x) \neq \phi$ Wir notieren, daß aufgrund der Definition der Operatoren gilt (siehe auch 2.11):
$a \in D_i^*(x) \iff a \in [x,b_i]$ und $T_i^* V_{i+1}^*(x,a) = V_i^*(x)$.
Vergrößert man die Menge $W_i(x)$ zu
$\tilde{W}_i(x) := \{a \in [x,b_i] \mid J_i(a) = J_i(m_i(x))\}$, dann gilt:

5.2 Lemma:
Falls Bedingung $(A_i)$ und $(B_i)$ erfüllt sind, dann gilt für $x \in \mathbb{R}^m_{b_i}$ , $1 \le i \le N$,

(1) $x \in O_i^c \Rightarrow (a \in \tilde{W}_i(x) \Rightarrow a > x)$ ,

(2) $x \in O_i^c \Rightarrow W_i(x) \subset \tilde{W}_i(x) = D_i^*(x)$ ,

(3) $x \in O_i \Rightarrow x \in D_i^*(x)$ .

Beweis:
(1) ergibt sich leicht durch einen Widerspruchsbeweis, (3)

gilt wegen 4.3; $W_i(x) \subset \tilde{W}_i(x)$ gilt offensichtlich und für $a \in \tilde{W}_i(x)$ gilt $V_i^*(x) = H_i(x) = T_i^* V_{i+1}^*(x,a)$ nach 4.2 und 5.2(1); die Inklusion $D_i^*(x) \subset \tilde{W}_i(x)$ ergibt sich aus 4.3. ∎

Seien $f_i: \mathbb{R}^m_{b_i} \to \mathbb{R}^m_{b_i}$ meßbare Abbildungen, $1 \le i \le N$; nach dem Optimalitätskriterium 2.13 und 5.1 (1) ist $f = (f_1, \cdots, f_N)$ genau dann stark optimaler Plan, wenn $f_i(x) \in D_i^*(x)$ gilt. Nach 5.2 (2),(3) ist dies schon der Fall, falls

(a) $x \in O_i$ , dann $f_i(x) = x$

(b) $x \in O_i^c$ , dann $f_i(x) \in W_i(x)$

erfüllt ist; dabei muß weiterhin die Gültigkeit von $(A_i)$ und $(B_i)$ vorausgesetzt werden. Wir halten fest:

5.3 Satz:
Mögen $(A_i)$ und $(B_i)$ gelten für $1 \le i \le N$, sei $m_i(x)$ Minimalpunkt von $J_i$ auf $[x, b_i]$, $x \in \mathbb{R}^m_{b_i}$, und $m_i(x) \in W_i(x)$ und

$$f_i^*(x) := \begin{cases} x & , J_i(x) \le H_i(x) \\ m_i(x) & , J_i(x) > H_i(x) \end{cases}$$

dann ist $f^* = (f_1^*, \cdots, f_N^*)$ stark optimaler Plan, falls die $f_i^*$ meßbar gewählt werden können.

Die Meßbarkeitsfragen werden in §6 behandelt und positiv beantwortet. Die Gültigkeit der Bedingungen $(A_i)$ und $(B_i)$ zeigen wir unten; zunächst fassen wir noch Eigenschaften von $O_i$ und $f_i^*$ zusammen.

5.4 Satz:
Sei $1 \le i \le N$ und $x \in \mathbb{R}^m_{b_i}$; dann gilt:

(1) $\{x \in \mathbb{R}^m_{b_i} \mid x \ge \xi_i\} \subset O_i$ ,

(2) $f_i^*(x) \in O_i$ für $f_i^*$ aus 5.3 ,

(3) $x \in O_i \cap Q_i(\xi_i)$ , $x \leq z \leq p_{\xi_i}(x) \Rightarrow z \in O_i$ ,

(4) $x \in O_i$ , $x \leq y \leq \xi_i \Rightarrow y \in O_i$ .

5.5 Bemerkung:

Die Ergebnisse des Satzes 5.4 lassen sich recht gut interpretieren und im Fall m = 2 auch problemlos graphisch darstellen. Darüber hinaus motivieren sie den Begriff einer verallgemeinerten (s,S) - Politik.

Die Interpretation zu (1) ist klar: Ist der Lagerbestand jeden Gutes j, $1 \leq j \leq m$, zu Beginn der Periode vor jeder Entscheidung nicht kleiner als das zugehörige $\xi_i^j$ , dann ist es optimal, den Bestand nicht zu vergrößern (siehe Abb.3,II).

(2) besagt, daß eine optimale Auffüllpolitik $f^*$ den Lagerbestand $x_i$ auf ein Niveau anhebt, auf dem man nicht bestellt hätte, sofern man diesen Bestand im Lager schon vor jeder Entscheidung vorgefunden hätte. Dies ist inbesondere auch mit dem Fall $x_i \in O_i$ verträglich (vergleiche 5.3).

(3) und (4) beschreiben die "Form" der Menge $O_i$ und sind in Abbildung 3 veranschaulicht (siehe I,III,IV).

Wir wollen noch auf folgenden Punkt aufmerksam machen:

Die Aussagen (3) und (4) besagen nicht: $x \in O_i$, $x \leq y \leq b_i \Rightarrow y \in O_i$ (siehe dazu V).

Diese zunächst wünschenswerte (?) und intuitiv erwartete Aussage ist für Mehrproduktlager durchaus nicht problemlos, sofern nicht zuvor Annahmen über den Grad der gegenseitigen Kopplung der verschiedenen Güter getroffen werden. Dies soll an einem einfachen Beispiel gezeigt werden:

Ein Reifenhändler vertreibt Winterreifen. Manche Kunden verlangen diese Reifen komplett aufgezogen, so daß er zusätzlich Felgen lagert. $x^1$ bedeute die Anzahl der Felgen, $x^2$ die der Reifen. Sei $\xi = (10,40)$, $y = (20,20)$, $y' = (50,20)$, $y'' = (20,30)$.

Nehmen wir an, daß für dieses Lager in einer Periode die Aussage $y \in O$ gilt. Nach 5.4 (3) folgt dann, daß etwa auch

gilt y"$\in O$; ungewiß dagegen ist die Aussage y'$\in O$, die man anschaulich auch nicht zwingend erwartet, da die Anzahl der Felgen in starkem Mißverhälnis zu der der Reifen steht, obwohl in diesem Fall $y \leq y'$ gilt.

Betrachten wir nun den Spezialfall m = 1. Nach Satz 5.4 gelten dann die Aussagen

(1)' $[\xi_i, b_i] \subset O_i$ ,

(2)' $f_i^*(x) \in O_i$ ,

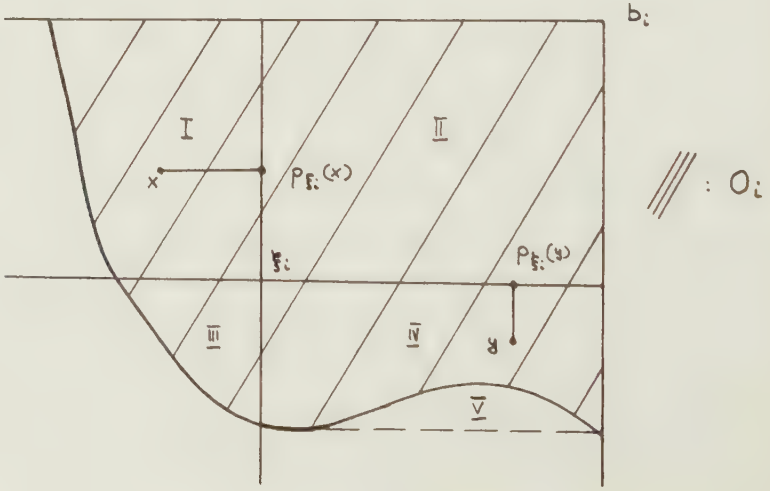
(3)' $x \in O_i,\ x \leq y \leq \xi_i \Rightarrow y \in O_i$

und unter Beachtung von $O_i \subset [a_i, b_i]$, $O_i$ abgeschlossen und (1)',(3)' folgt $O_i = [s_i, b_i]$. Sei $S_i$ Minimalpunkt von $J_i$ auf $[\xi_i, b_i]$, dann schreibt sich die stark optimale Politik $f^*$ aus 5.3 als

$$f_i^*(x) = \begin{cases} x & , x \geq s_i \\ S_i & , x < s_i \end{cases}$$

und damit als (s,S) - Politik.

5.6 Abbildung 3:



Beweis von 5.4:

(1) gilt nach 4.7(4); für $x \in O_i^C$ gilt $f_i^*(x) = m_i(x) \geq p_{\xi_i}(x) \geq \xi_i$ und wegen (1) gilt (2); wegen $H_i(z) \geq H_i(x) \geq J_i(x)$ reicht es, $J_i(x) \geq J_i(z)$ zu zeigen; dies gilt nach 4.13 (3), also gilt (3); wegen $J_i(x) \geq J_i(y)$ nach 4.13 (2) und wegen $p_{\xi_i}(x) = p_{\xi_i}(y) = \xi_i$ und 4.14 gilt $H_i(x) = H_i(y)$ und es folgt $J_i(y) \leq J_i(x) \leq H_i(x) = H_i(y)$, also $y \in O_i$ und damit (4). ∎

Wir kommen nun zum angekündigten

5.7 Satz:

Unter den Bedingungen (i) - (ix) gilt:

(1) Bedingung $(A_i)$ ist erfüllt für $i = 1,\ldots,N$ ,

(2) Bedingung $(B_i)$ ist erfüllt für $i = 1,\ldots N$ ,

(3) $V_{i+1}^*(v_i(x,t)) \in \mathcal{L}_1(\Phi_i)$ , $x \in \mathbb{R}^m_{b_i}$ für $i = 1,\ldots N$ .

Beweis:

Wir gehen induktiv vor; sei $i = N$; nach Definition gilt $V_{N+1}^*(x) = h(x)$ und h ist nach (viiia) $K_{N+1}$-isoton und nach (iic) stetig und damit gilt (1); nach (iiib) ist $h(v_N(x,t)) \in \mathcal{L}_1(\Phi_N)$, also gilt (3); nach (viiib) ist $V_{N+1}^*$ antiton auf $\{x \mid x \leq \xi_{N+1}\}$; sei $x \in Q_{N+1}(\xi_{N+1})$ und $x \leq z \leq p_{\xi_{N+1}}(x)$, dann gilt wegen $x \not> \xi_{N+1}$ und $z \not> \xi_{N+1}$ nach (viii) $h(x) \geq h(z)$, also gilt auch (2).

Gelte nun $(A_i),\ldots,(A_N)$

$(B_i),\ldots,(B_N)$

$V_j^*(v_{j-1}(x,t)) \in \mathcal{L}_1(\Phi_{j-1})$ für $j = i+1,\ldots,N+1$,

dann sind $R_i$ und $J_i$ wohldefiniert und haben die Monotonieeigenschaften gemäß 4.12 und 4.13.

a) zu zeigen $(A_{i-1})$ : (1) $V_i^*$ ist $K_i$-isoton,

(2) $V_i^*$ ist stetig ;

für $x \le z \le b_i$ gilt

$$V_i^*(x) = U_i^* V_{i+1}^* = \min \{J_i(x), H_i(x)\} \le K_i + \inf_{b_i \ge y \ge x} \{J_i(y)\}$$

$$\le K_i + \inf_{b_i \ge y \ge z} \{J_i(y)\} \le K_i + \min \{J_i(z), H_i(z)\}$$

und damit gilt (1); (2) ergibt sich aus $(A_i)$ und 4.7.

b) Zu zeigen $(B_{i-1})$: (1) $V_i^*$ ist antiton auf $\{x \mid x \le \xi_i\}$ ,

(2) $x \in Q_i(\xi_i) \Rightarrow \bigwedge_{x \le z \le p_{\xi_i}(x)} V_i^*(x) \ge V_i^*(z)$

(1) für $x \le y \le \xi_i$ gilt wegen (ia), (vib) und $(B_i 1)$ $R_i(x) \ge R_i(y)$ und mit (via) auch $J_i(x) \ge J_i(y)$.

Fall 1: $x \in O_i$; es gilt $V_i^*(x) = J_i(x) \ge J_i(y) \ge V_i^*(y)$;

Fall 2: $x \notin O_i$; für $m_i(x)$ Minimalpunkt von $J_i$ auf $[x, b_i]$ gilt $V_i^*(x) = J_i(m_i(x)) + K_i$; wir unterscheiden die folgenden Fälle:

$\alpha)$ $m_i(x) \ge y$

$\beta)$ $m_i(x) \not\ge y$

$\beta 1)$ $m_i(x) \le y$

$\beta 2)$ $m_i(x) \not\le y$ , $m_i(x) \le \xi_i$

$\beta 3)$ $m_i(x) \not\le y$ , $m_i(x) \not\le \xi_i$

und zeigen nur $\beta 3)$:

Man überlegt sich leicht, daß $m_i(x) \in Q_i(\xi_i)$ gelten muß und nach 3.15 können nur die Fälle $v_i(m_i(x), t) \in Q_{i+1}(\xi_{i+1})$ oder $v_i(m_i(x), t) \in Q_{-(i+1)}(\xi_{i+1})$ auftreten. Im ersten Fall folgt für $m_i(x) \le z \le p_{\xi_i}(m_i(x))$ aus (vii) und $(B_i 2)$

$V_{i+1}^*(v_i(m_i(x), t)) \ge V_{i+1}^*(v_i(z, t))$ und speziell also

$V_{i+1}^*(v_i(m_i(x), t)) \ge V_{i+1}^*(v_i(p_{\xi_i}(m_i(x)), t))$, im zweiten aus (vii) und $(B_i 1)$ $V_{i+1}^*(v_i(m_i(x), t)) \ge V_{i+1}^*(v_i(p_{\xi_i}(m_i(x)), t))$, so daß

in jedem Fall $R_i(m_i(x)) \geq R_i(p_{\xi_i}(m_i(x)))$ und damit

$J_i(m_i(x)) \geq J_i(p_{\xi_i}(m_i(x)))$ erfüllt ist. Wegen

$p_{\xi_i}(m_i(x)) \geq \xi_i \geq y$ gilt dann

$$V_i^*(x) = J_i(m_i(x)) + K_i \geq J_i(p_{\xi_i}(m_i(x))) + K_i$$

$$\geq \inf_{b_i \geq c \geq y} \{J_i(c) + K_i\} = H_i(y) \geq V_i^*(y) \text{ und damit}$$

ist (1) gezeigt;

(2) für $x \in Q_i(\xi_i)$ und $x \leq z \leq p_{\xi_i}(x)$ unterscheiden wir

Fall 1: $x \in O_i$ ; mit (vii) und ($B_i$1,2) folgt $J_i(x) \geq J_i(z)$

und daraus $V_i^*(x) = J_i(x) \geq J_i(z) \geq \min\{J_i(z), H_i(z)\} = V_i^*(z)$ ;

Fall 2: $x \notin O_i$ ; ist $m_i(x)$ wie oben Minimalpunkt von $J_i$ auf $[x, b_i]$, dann gilt $V_i^*(x) = J_i(m_i(x)) + K_i$ und wir unterscheiden

α) $m_i(x) \geq z$

β) $m_i(x) \ngeq z$

und verzichten auf den einfachen Nachweis der Behauptung im Fall α). Zu β): Man überlegt sich leicht, daß $m_i(x) \in Q_i(\xi_i)$ und $p_{\xi_i}(m_i(x)) \geq z$ gelten muß und Fallunterscheidungen bei $v_i(m_i(x), t)$ gemäß 3.15 zeigen mit Hilfe von ($B_i$1,2) die Ungleichung $R_i(m_i(x)) \geq R_i(p_{\xi_i}(m_i(x)))$ und damit

$J_i(m_i(x)) \geq J_i(p_{\xi_i}(m_i(x)))$. Weiter ergibt sich dann

$$V_i^*(x) = J_i(m_i(x)) + K_i \geq J_i(p_{\xi_i}(m_i(x)) + K_i \geq \inf_{b_i \geq c \geq z} \{J_i(c) + K_i\}$$

$$= H_i(z) \geq V_i^*(z) \text{ und dies zeigt } (B_i 2).$$

c) Wir zeigen: Für $x \in \mathbb{R}^m_{b_{i-1}}$ gilt: $\sup_{t \in \vartheta_{i-1}} |V_i^*(v_{i-1}(x,t))| < \infty$ ;

da die Beweise im Fall $x \in O_i$ und $x \notin O_i$ sehr ähnlich ver-

laufen, beschränken wir uns auf $x \in O_i$: es gilt

$$\sup_{t \in \mathring{\vartheta}_{i-1}} |V_i^*(v_{i-1}(x,t))| \leq \sup_{x \leq b_i} |V_i^*(x)| \text{ und}$$

$$V_i^*(x) = J_i(x) \leq H_i(x) = H_i(p_{\xi_i}(x)) \leq \max_{x \in [\xi_i, b_i]} \{|H_i(x)|\} \text{ und}$$

$$J_i(x) \geq J_i(p_{\xi_i}(x)) \geq \min_{y \in [\xi_i, b_i]} \{-|J_i(y)|\} \text{ und damit}$$

$$|V_i^*(x)| \leq |J_i(x)| \leq \max \left\{ \begin{array}{l} \max \{|h_i(x)| \, | \, x \in [\xi_i, b_i]\} \\ \\ \max \{|J_i(x)| \, | \, x \in [\xi_i, b_i]\} \end{array} \right\} < \infty \, .$$

## § 6 Überlegungen zur Meßbarkeit

In 5.3 sind Auffüllfunktionen angegeben worden. Damit diese Funktionen einen Plan im Sinne der Definition darstellen, muß ihre Meßbarkeit gewährleistet sein.
Wir formulieren -speziell auf das obige Modell zugeschnitten- einen Selektionssatz aus SCHÄL (75a) und weisen nach, daß die Voraussetzungen dieses Satzes erfüllt sind. Damit ist dann sichergestellt, daß die angegebenen Auffüllfunktionen meßbar gewählt werden können.
Zunächst stellen wir einige Hilfsmittel bereit:

6.1 Lemma:
Sei $A \subset \mathbb{R}_b^m$ , $f: \mathbb{R}_b^m \to \mathbb{R}_b^m$ stetig, dann gilt:
$A$ offen $\Rightarrow \{y \in \mathbb{R}_b^m \mid [f(y), b] \subset A\}$ offen.

Den Beweis skizzieren wir nur kurz. Nach KURATOWSKI(66), 18,I, ist folgende Aussage äquivalent zur Behauptung:
$A$ abgeschlossen $\Rightarrow \{y \in \mathbb{R}_b^m \mid [f(y), b] \cap A \neq \phi\}$ abgeschlossen;
damit sieht man nun leicht die Gültigkeit von 6.1. ∎

Offensichtlich gilt

6.2 Lemma:
Für $a \in \mathbb{R}_b^m$ ist die Abbildung $p_a(x)$ aus 3.9 stetig.

Zur Formulierung des Selektionssatzes benutzen wir folgende Abkürzungen:

6.3 Definition:

$B(\mathbb{R}_b^m) := \{u: \mathbb{R}_b^m \to \mathbb{R} \mid u \text{ beschränkt und meßbar}\}$ ,

$\hat{B}(\mathbb{R}_b^m) := \{u: \mathbb{R}_b^m \to \mathbb{R} \mid u \text{ nach oben beschränkt und meßbar}\}$,

$C(\mathbb{R}_b^m) := \{u: \mathbb{R}_b^m \to \mathbb{R} \mid u \in B(\mathbb{R}_b^m),\ u \text{ stetig}\}$ ,

$Q(\mathbb{R}_b^m \times \mathbb{R}_b^m) := \{u \in B(\mathbb{R}_b^m \times \mathbb{R}_b^m) \mid u(s,\cdot) \in C(\mathbb{R}_b^m),\ s \in \mathbb{R}_b^m\}$ ,

$$\hat{Q}(\mathbb{R}_b^m \times \mathbb{R}_b^m) := \{u \in \hat{B}(\mathbb{R}_b^m \times \mathbb{R}_b^m) \mid \bigvee_{(u_n)} \bigvee_{n \in \mathbb{N}} u_n \in Q(\mathbb{R}_b^m \times \mathbb{R}_b^m) \ , \ u_n \downarrow u\},$$

$$\mathfrak{K}(\mathbb{R}_b^m) := \{A \subset \mathbb{R}_b^m \mid A \neq \phi, A \text{ kompakt}\}.$$

6.4 Definition: (siehe etwa BERGE (63))

Eine Abbildung $\phi: \mathbb{R}_b^m \to \mathfrak{K}(\mathbb{R}_b^m)$ heißt nach oben halbstetig genau dann, wenn gilt:

$$\bigwedge_{G \subset \mathbb{R}_b^m} G \text{ offen} \Rightarrow \{x \mid \phi(x) \subset G\} \text{ offen}.$$

Zur Abkürzung sagen wir: $\phi$ nohs.
Damit können wir formulieren:

6.5 Satz: (siehe SCHÄL (75a), §12)

Sei $u \in \hat{Q}(\mathbb{R}_b^m \times \mathbb{R}_b^m)$ und $\phi: \mathbb{R}_b^m \to \mathfrak{K}(\mathbb{R}_b^m)$ nohs, dann gilt:

Es gibt eine meßbare Abbildung $\tilde{f}: \mathbb{R}_b^m \to \mathbb{R}_b^m$ mit

a) $\tilde{f}(x) \in \phi(x) \ , \ x \in \mathbb{R}_b^m$ ,

b) $u(x,\tilde{f}(x)) = \max_{a \in \phi(x)} u(x,a) \ , \ x \in \mathbb{R}_b^m$ .

Wir wenden diesen Satz nun auf die Periode i an, $i \in \{1,\ldots,N\}$, unterdrücken dabei jedoch der Einfachheit halber den Index.
Speziell wählen wir

6.6 $\phi(x) := [x,b] \cap [\xi,b] = [p_\xi(x),b]$ und

6.7 $u(x,y) := -J(y)$ .

Daß diese Wahl erlaubt ist zeigt

6.8 Lemma:

(1) $\phi$ ist nohs,

(2) $u(x,y) \in \hat{B}(\mathbb{R}_b^m \times \mathbb{R}_b^m)$,

(3) für $u_n(x,y) := -\min\{n,J(y)\}$ gilt $u_n \in Q(\mathbb{R}_b^m \times \mathbb{R}_b^m)$, $n \in \mathbb{N}$,

(4) $u_n \geq u_{n+1}$ ,

(5) $\lim_{n \to \infty} u_n = u$ .

Beweis:

(1) folgt aus 6.1 und 6.2, (2) aus der Stetigkeit von J und 4.13; Stetigkeit von $u_n$ ist durch die Stetigkeit von J gewährleistet, die auch die Meßbarkeit sicherstellt, Beschränktheit ergibt sich durch
$-n \leq -\min\{n, J(y)\} \leq -\min\{n, \min\{J(x) \mid x \in [\xi, b]\}\}$ , also gilt (3); (4) ist klar und für (5) wähle bei vorgegebenem y ein $n_0 > J(y)$, dann gilt für $n \geq n_0$ stets $u_n(x,y) = -J(y) = u(x,y)$.

Satz 6.5 liefert nun die Aussage:

Es gibt eine meßbare Abbildung $\tilde{f}: \mathbb{R}_b^m \to \mathbb{R}_b^m$ mit

a) $\tilde{f}(x) \in [p_\xi(x), b]$ ,

b) $J(\tilde{f}(x)) = \min\{J(y) \mid y \in [p_\xi(x), b]\}$ .

Wir wählen dann die Auffüllfunktionen für die Perioden 1,...,N gemäß

6.3 $$f_i^*(x) = \begin{cases} x, & x \in O_i \\ \tilde{f}_i(x), & x \notin O_i \end{cases} .$$

## § 7 Spezialfälle des allgemeinen Lagermodells

Wir führen zwei Zusatzvoraussetzungen ein:

(Z1) $K_i = 0$ , $i = 1,\ldots,N$

(Z2) Die Monotonieeigenschaften von $G_i$ seien "streng" im Sinne von 3.1 (2),(3).

Unter diesen Voraussetzungen hat das Modell besonders einfache Struktur. Wir zeigen:

7.1 Satz:

Unter den Zusatzvoraussetzungen (Z1) und (Z2) gilt für $1 \le i \le N$:

(1) $O_i = [\xi_i, b_i]$ ,

(2) $f_i(x) = p_{\xi_i}(x)$ ist stark optimale Auffüllpolitik,

(3) die Bestellmengen sind antiton, d.h.:
$x \le y \le b_i \Rightarrow f_i(x) - x \ge f_i(y) - y$.

Beweis:

(1): Nach 4.7 (4) gilt schon $[\xi_i, b_i] \subset O_i$ ; sei nun $x \in O_i$ und nehmen wir an: $x \ngeq \xi_i$ . Wir beschränken uns auf den Fall $x \in Q_{-i}(\xi_i)$ und erhalten $J_i(x) \le H_i(x) = J_i(\xi_i)$ und wegen (Z2) auch $G_i(x) > G_i(\xi_i)$ und deshalb $J_i(x) > J_i(\xi_i)$. Widerspruch! (2) folgt unmittelbar aus (Z1) und der Struktur der Auffüllpolitik im allgemeinen Fall. (3) ergibt sich durch Fallunterscheidungen und wir beschränken uns auf $x \in Q_{-i}(\xi_i)$ und $y \in Q_i(\xi_i)$. Es reicht den Fall $y^j \le \xi_i^j$ zu betrachten und man erhält wegen $x \le y$ sofort

$$p_{\xi_i}(x)^j - x^j = \xi_i^j - x^j \ge \xi_i^j - y^j = p_{\xi_i}(y)^j - y^j \ .$$

∎

7.2 Bemerkung:

In 7.1 (1) hängt die Menge $O_i$ nicht von der Wertfunktion $V_{i+1}$ ab. Insbesondere hängt also die Entscheidung "bestelle" oder "bestelle nicht" nicht von der terminalen Funktion ab (totaler Wertverlust, kein Wertverlust, Berücksichtigung von Wertminderung).
Weiterhin sei auf den Zusammenhang mit den nach VEINOTT(65) und K.ARROW sogenannten "myopic politics" hingewiesen:
Durch $f_i(x) = p_{\xi_i}(x)$ , $x \in \mathbb{R}^m_{b_i}$ , wird die Funktion $G_i$ auf $[x,b_i]$ minimiert und zwar sowohl im Fall $x \in O_i$ als auch für $x \notin O_i$ .

Weiterhin ist im Falle eines stationären endlichstufigen Modells (die Lagerdeterminanten hängen nicht vom Periodenindex $i \in \{1,\ldots,N\}$ ab) durch (1) und (2) eine stationäre stark optimale Auffüllpolitik für den endlichen Horizont gegeben, die nur von $\xi$, dem Modalpunkt von -G abhängt.

Wir wollen nun ein spezielles stationäres Modell betrachten, das den Übergang zum unendlichstufigen Modell liefert. Wir machen dabei die folgenden Annahmen:

(1) Innerhalb des Planungszeitraumes hängen die Lagerdeterminanten nicht vom Periodenindex $i \in \{1,\dots,N\}$ ab, also:

$$c_i=c,\ K_i=K,\ L_i=L,\ \alpha_i=\alpha,\ b_i=b,\ \xi_i=\xi,\ v_i=v,\ \Phi_i=\Phi\ .$$

(2) Nach Ablauf von N Perioden tritt kein Wertverlust auf, d.h., im Modell $h \equiv 0$ und wir nehmen an $c_{N+1} = c$, was einer terminalen Funktion $V^0 = -\tilde{c}$ entspricht.
Die Funktionen $G_i$ schreiben sich dann einheitlich als

$$G(x) = c'x + L(x) - \alpha c' \int v(x,t)\,d\Phi(t)$$

und die in §3 angegebenen Voraussetzungen vereinfachen sich zu

7.3 (i) a) $v(\cdot,t)$ ist isoton für $t \in \mathcal{T}$,

b) $v(y,t) \le y$, $t \in \mathcal{T}$, $y \in \mathbb{R}^m_b$,

(ii) a) $v(\cdot,t)$ ist stetig für $t \in \mathcal{T}$,

b) $G(\cdot)$ ist stetig,

(iii) $\int v(x,t)^j\,d\Phi(t) > -\infty$, $x \in \mathbb{R}^m_b$,

(iv) $\lim\limits_{x \to -\infty} G(x) = +\infty$, d.h.:

$$\bigwedge_M \bigvee_{a_M \in \mathbb{R}^m_b} \bigwedge_{x \in \mathbb{R}^m_b} (x \not\ge a_M \Rightarrow G(x) > M)\ ,$$

(v) $-G$ ist unimodal erzeugt mit Modalpunkt $\xi \le b$,

(vi) für $x \in \mathbb{R}^m_b$ und $x \le z \le p_\xi(x)$ gilt $v(z,t) \le p_\xi(v(x,t))$ *),

(vii) $L(x) < \infty$.

Das nächste Kapitel untersucht nun, inwieweit sich unter diesen Voraussetzungen ein Lager bei unendlichem Planungshorizont optimal steuern läßt und welche Verbindungen sich zu den bisher erzielten Ergebnissen für den endlichen Horizont ziehen lassen.

*) vergleiche §3

## III: Unendlicher Horizont

### § 8 Das stationäre Modell, Problemstellung und Normierung der optimalen endlichstufigen Pläne

Wir betrachten jetzt den Fall, daß die das Lagermodell charakterisierenden Daten

(a) für alle $i \in \mathbb{N}$ definiert sind und

(b) diese Daten nicht von i abhängen.

Man spricht dann von einem stationären Modell mit unendlichem Horizont. Im einzelnen sind also folgende Größen gegeben:

(1) Die Nachfrage ist durch eine Folge unabhängiger, identisch verteilter zufälliger Größen mit Verteilungsfunktion $\Phi$ gegeben, $D_i$ sei die Nachfrage in $(i,i+1]$ mit $D_i \geq 0$,

(2) die maximale Lagerkapazität in $(i,i+1]$ ist durch $b \in \mathbb{R}_+^m$ gegeben, $x_i, y_i$ haben dieselbe Bedeutung wie in §1,

(3) die meßbare Abbildung $v: \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}_+^m \to \mathbb{R}^m$ gibt für $y_i \in \mathbb{R}_b^m$ und $t \in \vartheta$ den Lagerbestand am Ende der Periode $(i,i+1]$ an, d.h.: $x_{i+1} = v(y_i,t)$, falls $y_i$ der Startbestand in $(i,i+1]$ nach erfolgter Auffüllung und t die Nachfrage in $(i,i+1]$ ist,

(4) $B(Z) := K \cdot \delta(Z) + c'Z$ gibt mit $c \geq 0$ für $Z \geq 0$ die Bestellkosten in der Periode $(i,i+1]$ an,

(5) die meßbare Abbildung $l: \mathbb{R}_b^m \times \mathbb{R}_+^m \to \mathbb{R}_+$ gibt für $y_i \in \mathbb{R}_b^m$ und $t \in \vartheta$ die Lagerungs - und Fehlmengenkosten in der Periode $(i,i+1]$ an, wenn t die Nachfrage darstellt. Mit $L(y) := \int l(y,t)d\Phi(t)$ gibt $L(y_i)$ wieder die mittleren Lagerungs - und Fehlmengenkosten in $(i,i+1]$ an.

(6) $0 \leq \alpha < 1$ ist ein Diskontierungsfaktor, mit dem zukünftige Kosten diskontiert werden.

Ähnlich wie in §2 für den endlichen Fall gezeigt wurde, bestimmen auch hier die Größen ein stochastisches dynamisches Entscheidungsmodell, jetzt jedoch mit unendlichem Horizont.

Durch eine Startverteilung, das Bewegungsgesetz und einen Plan $\Pi = (\Pi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß $P_\Pi$ auf dem Produktraum SxAxSxAx... -versehen mit der Produkt-$\delta$-Algebra $\mathfrak{S}\otimes\mathfrak{A}\otimes\mathfrak{S}\otimes\mathfrak{A}$ ...- definiert. Speziell gilt wieder ähnlich wie im endlichen Fall $S = A = \mathbb{R}_b^m$ und $\mathfrak{S} = \mathfrak{A} = \mathfrak{B}_b^m$.

Bedeuten $\mathfrak{S}_n$ die Projektion von SxAx... auf den n-ten Zustandsraum und $\alpha_n$ die Projektion auf den n-ten Aktionenraum, dann wird der stochastische Verlauf des Systems durch den Prozeß $(\mathfrak{S}_1,\alpha_1,\mathfrak{S}_2,\alpha_2,\ldots)$ beschrieben. $\mathfrak{S}_n$ bzw. $\alpha_n$ beschreiben dann gerade Zustand bzw. Aktion zur Zeit n.

Wie im endlichen Fall reichen zur optimalen Steuerung des Systems wieder deterministische Markoffsche Pläne aus (vergleiche HINDERER (70),§18). Die weiteren Ausführungen zeigen, daß (in noch zu präzisierendem Sinne) optimale Pläne sogar stationär gewählt werden können. Dabei gilt:

8.1 Definition:

Ein deterministischer Markoffplan f ist eine Folge $f=(f_1,f_2,\ldots)$ von meßbaren Abbildungen $f_i: \mathbb{R}_b^m \to \mathbb{R}_b^m$, $i\in\mathbb{N}$, mit $f_i(x)\in D(x) := [x,b]$ für $x\in\mathbb{R}_b^m$.

Gilt überdies $f_n=f_m=f \quad \forall n,m\in\mathbb{N}$, dann heißt der Plan stationär und wir schreiben kurz $f^\infty$.

Sei zur Abkürzung $\Delta_M$ die Menge der Markoffschen Pläne und die Kosten in der Periode $(i,i+1]$ seien gegeben durch $r_i(x,y) := B(y-x) + L(y)$. Wir legen fest:

$$8.2 \quad V_f := E_f\Big(\sum_{i=1}^{\infty} \alpha^{i-1} r_i \,|\, \mathfrak{S}_1\Big), \quad f\in\Delta_M, \qquad \text{und}$$

$$8.3 \quad V := \inf_{f\in\Delta_M} V_f .$$

Einen Markoffschen Plan $f=(f_1,f_2,\ldots)$ nennen wir optimal, falls gilt: $V_f=V$.

Ähnlich wie in §2 führen wir die folgenden Operatoren ein.

8.4 Definition: (vergleiche 2.6)

Seien $x,y,t,c\in\mathbb{R}^m$ und $w:\ \mathbb{R}^m\to\mathbb{R}$ eine meßbare Abbildung, für die die folgenden Ausdrücke definiert sind:

$$Tw(x,y) := K\delta(y-x)+c'(y-x)+L(y)+\alpha\int w(v(y,t))d\Phi(t)\ ,$$

$$T_f w(x) := Tw(x,f(x)) \quad \text{für eine meßbare Abbildung}$$

$$f:\ \mathbb{R}_b^m\to\mathbb{R}_b^m \text{ mit}$$

$$f(x)\in[x,b]\ \ \forall x\in\mathbb{R}_b^m\ ,$$

$$Uw(x) := \inf_{y\in D(x)} Tw(x,y)\ ,$$

Den Zusammenhang zwischen V und den eingeführten Operatoren zeigt die Optimalitätsgleichung (vergleiche HINDERER (70))

8.5 $\quad UV = V$

und ein notwendiges und hinreichendes Kriterium für die Optimalität eines stationären Markoffschen Planes liefert

8.6 Satz: (siehe etwa SCHÄL (75a))

$f^\infty$ ist optimal $\iff T_f V = V$ .

Definiert man für $x\in\mathbb{R}_b^m$

8.7 $D^*(x) := \{y\in[x,b]\mid TV(x,y) = UV(x)\}$, dann gilt

8.8 Lemma: (siehe SCHÄL (75a))

$f^\infty$ ist optimal $\iff f(x)\in D^*(x)$, $\forall x\in\mathbb{R}_b^m$.

$D^*(x)$ kann dabei als die Menge der optimalen Aktionen im Zustand x interpretiert werden.

Der Übergang vom angegebenen, unendlichstufigen Modell zu einem Modell mit endlichem Horizont wird erreicht, indem man $r_i(x,y)\equiv 0$ wählt für $i>i_0$.

Wählt man speziell $r_i(x,y) := B(y-x)+L(y)$ für $1 \le i \le N$, $r_{N+1}(x,y) := -c'x$ und $r_i \equiv 0$ für $i > N+1$, dann erhält man bei gegebenem N gerade das endliche Modell, das in §7 skizziert ist.

Wir vereinbaren noch, daß die Größen, die zu einem Modell mit Horizont N gehören, durch einen oberen Index N gekennzeichnet werden sollen, d.h.: die Größen aus Kapitel II schreiben sich z.B. als

$$V_{if}^N,\ V_i^N,\ D_i^N,\ O_i^N \quad \text{usw.}$$

Speziell gilt dann $V_{N+2}^N = V_{N+3}^N = \ldots = 0$; fehlt weiter der untere Periodenindex i, so soll damit stets i=1 gemeint sein, z.B.: $V_{1f}^N \equiv V_f^N$, $V_1^N \equiv V^N$.

Der dargestellte Zusammenhang zwischen Modellen mit endlichem und unendlichem Horizont wirft die folgenden Fragen auf:

(1) Existiert eine optimale stationäre Politik für das unendlichstufige Modell?
Wenn ja, läßt sich dann die Struktur des endlichen auf das unendliche Modell übertragen?

(2) Gilt $V = \lim_{N\to\infty} V^N$ ?

Gilt diese Beziehung, dann lassen sich also die minimalen Kosten in den Perioden 1,2,3,... durch die minimalen Kosten in den Perioden 1,2,...,N approximieren und man spricht von Wertiteration.

(3) Läßt sich ein optimaler stationärer Plan für das unendliche Modell aus (den bekannten) Plänen $f^N=(f_1^N,\ldots,f_N^N)$ mit $V_{if^N}^N = V_i^N$, $1 \le i \le N$, gewinnen?

Ist dies möglich, dann spricht man von Planiteration.

In §9 wird eine äquivalente Bedingung für die Existenz einer optimalen stationären Politik und die Gültigkeit der

Wertiteration formuliert und gezeigt, daß diese Bedingung erfüllt ist. §10 untersucht Frage (3) und beantwortet sie positiv. §11 schließlich zeigt, daß sich die Struktur des endlichen Modells im wesentlichen auf den unendlichen Fall überträgt, optimale Pläne können wieder als verallgemeinerte (s,S) - Politiken gewählt werden.

8.9 Generalvoraussetzungen für die §§ 8,9,10,11

Wir nehmen an, daß 7.3 (i) - (vii) erfüllt sind und weiter

(viii)' $v(x,t) \geq x-t \quad \forall x \in \mathbb{R}_b^m \quad \forall t \in \mathbb{R}_+^m$ ,

(ix)' $\int t^i d\Phi(t) < \infty \quad \forall i \in \{1,\ldots,m\}$ .

Offensichtlich kann auf Bedingung 7.3 (iii) dann verzichtet werden.

Als Vorbereitung für die weiteren Überlegungen zeigen wir zunächst noch Eigenschaften von Modellen mit endlichem Horizont im Sinne von §7.

8.10 Satz:

Für $x \in \mathbb{R}_b^m$ sei zur Abkürzung

$\tilde{B}(x) := K+L(x)+\int c'(x-v(x,t))d\Phi(t)$ und

$\tilde{A}(x) := L(x)+\frac{1}{1-\alpha}\tilde{B}(x)+\int |c'v(x,t)|d\Phi(t)$; dann gilt:

(1) $\bigwedge_{x \in \mathbb{R}_b^m} \bigwedge_{N \in \mathbb{N}} \bigwedge_{N+1 \geq n \in \mathbb{N}} V_n^N(x) \geq -\alpha^{N+1-n} \cdot c'x$ ,

(2) $\bigwedge_{x \in \mathbb{R}_b^m} \bigwedge_{N \in \mathbb{N}} \bigwedge_{N+1 \geq n \in \mathbb{N}} V_n^N(x) \leq \tilde{A}(x)$ ,

(3) $\bigwedge_{x \in \mathbb{R}_b^m} \bigwedge_{N \in \mathbb{N}} \bigwedge_{N+1 \geq n \in \mathbb{N}} V^{*N}_n(x) \geq -\alpha^{N+1-n} \cdot c'x+c'x$ ,

(4) $\bigwedge_{x \in \mathbb{R}_b^m} \bigwedge_{N \in \mathbb{N}} \bigwedge_{N+1 \geq n \in \mathbb{N}} V^{*N}_n(x) \leq \tilde{A}(x)+c'x$ ,

(5) $\bigwedge_{x\in \mathbb{R}_b^m} \bigwedge_{N\in \mathbb{N}} \bigwedge_{N\geq n\in \mathbb{N}} R_n^N(x)\leq \tilde{A}(x)+c'x+K$ ,

(6) $\bigwedge_{x\in \mathbb{R}_b^m} \bigwedge_{N\in \mathbb{N}} \bigwedge_{N\geq n\in \mathbb{N}} R_n^N(x)\geq -\int |c'v(x,t)|\,d\Phi(t)$ ,

(7) $\bigvee_{a\in \mathbb{R}_b^m} \bigwedge_{N\in \mathbb{N}} \bigwedge_{N\geq n\in \mathbb{N}} O_n^N \subset (a,b]$ .

8.11 Bemerkung:

Die wesentliche Aussage in 8.10 ist Aussage (7). Durch die gleichmäßige Beschränktheit der Mengen $O_n^N$ - also anschaulich gesprochen, die gleichmäßige Beschränktheit der Mengen der Zustände mit der Entscheidung "bestelle nicht" - lassen sich die stark optimalen Politiken bei endlichem Horizont (in noch zu präzisierendem Sinne) normieren, wodurch schließlich der Nachweis der gleichmäßigen Konvergenz der Wertfunktion $V^N$ auch bei hier vorliegender linearer terminaler Funktion gelingt.

Beweis von 8.10:

Da der Umfang eines detaillierten Beweises zu groß würde, beschränken wir uns auf eine Beweisskizze.

(1) ergibt sich induktiv und mit 2.11 daraus (3); für $n=N+1$ gilt (2) offensichtlich und für $n\leq N$ überlegt man sich, daß bei gegebenem $x\in \mathbb{R}_b^m$ bei Verwendung des speziellen Markoffplanes $f=(p_x,\ldots,p_x)$ wegen $V_{nf}^N(x)\leq \tilde{A}(x)$ auch $V_n^N(x)\leq \tilde{A}(x)$ erfüllt ist; mit 2.11 ergibt sich damit auch (4); (5) ergibt sich aus (4),und (6) sieht man für $n\leq N-1$ mit (3) durch die folgende Abschätzung

$$R_n^N(x)=\int V^*{}_{n+1}^N(v(x,t))\,d\Phi(t)\geq \int(-\alpha^{N-n}\cdot c'v(x,t)+c'v(x,t))\,d\Phi(t)$$

$$\geq -(1-\alpha^{N-n})\int |c'v(x,t)|\,d\Phi(t)\geq -\int |c'v(x,t)|\,d\Phi(t)\ .$$

Zu $M := \max\{G(x)+\alpha(\tilde{A}(x)+c'x+K) \mid x\in[\xi,b]\} + K$
$\quad - \min\{-\alpha\int|c'v(x,t)|d\Phi(t) \mid x\in[\xi,b]\}$

wähle $a_M \in \mathbb{R}_b^m$ gemäß 7.3 (iv); dann gilt für $N\in\mathbb{N}$, $N\geq n\in\mathbb{N}$ und $z\neq a_M$ wegen $J_n^N(z)\leq G(z)+\alpha(\tilde{A}(z)+c'z+K)$ die Abschätzung

$$\begin{aligned}
J_n^N(z) &> \max\{J_n^N(x)+K \mid x\in[\xi,b]\}+\alpha R_n^N(p_\xi(z)) \\
&\quad -\min\{-\alpha\int|c'v(x,t)|d\Phi(t) \mid x\in[\xi,b]\} \\
&\geq \max\{J_n^N(x)+K \mid x\in[\xi,b]\}-\alpha\int|c'v(p_\xi(z),t)|d\Phi(t) \\
&\quad -\min\{-\alpha\int|c'v(x,t)|d\Phi(t) \mid x\in[\xi,b]\} \\
&\geq \min\{J_n^N(x)+K \mid x\in[z,b]\} = H_n^N(z)
\end{aligned}$$

und damit $O_n^N \subset [a_M,b]$ . ∎

Wir kommen nun zur mehrfach erwähnten Normierung der Auffüllfunktionen des endlichen Horizontes.
Nach §6 sind die Auffüllfunktionen meßbare Abbildungen f (oberer und unterer Index werden unterdrückt) und wir normieren f durch

8.12 $\quad \hat{f}(x) := f(p_e(x))$

und wählen dabei e beliebig, aber fest mit $e\leq\min(a,\xi)$ und a aus 8.10 (7). $\hat{f}$ ist dann wieder meßbar, und wenn $f^N = (f_1^N,\ldots,f_N^N)$ ein stark optimaler Plan ist, so gilt dies auch für $\hat{f}= (\hat{f}_1^N,\ldots,\hat{f}_N^N)$, wie exemplarisch für den Fall $x\notin O_i^N$ und $x\neq e$ gezeigt werden soll:

Wegen $p_e(x)\notin O_i^N$ folgt $\hat{f}_i^N(x) = f_i^N(p_e(x))\in[p_\xi(p_e(x)),b]$

und $J_i^N(\hat{f}_i^N(x)) = J_i^N(f_i^N(p_e(x))) = \min\{J_i^N(y) \mid y\in[p_\xi(x),b]\}$

$$= J_i^N(f_i^N(x))$$

und damit $\hat{f}_i^N(x)\in W_i(x)$ .

Da die Existenz von optimalen Politiken im endlichen Fall

gesichert ist, zeigen die obigen Überlegungen, daß auch die Existenz von normierten optimalen Politiken gewährleistet ist.

8.13 Vereinbarung:

Ist im folgenden von stark optimalen Politiken bei endlichem Horizont die Rede, dann sollen damit stets normierte Pläne im Sinne von 8.12 gemeint sein.

Wir notieren, daß für einen normierten Plan stets

$f_i^N(x) = f_i^N(p_e(x))$ gilt. (vergleiche §9)

Zum Schluß dieses Paragraphen stellen wir noch Hilfsmittel zur Verfügung, die in den §§9,10 gebraucht werden.

8.14 Definition:

Sei $A \subset \mathbb{R}_b^m$ und $u: A \to \mathbb{R}$; die Abbildung u heißt nach unten halbstetig (Abk.: nuhs) auf A : $\Leftrightarrow$

$\bigwedge_{r \in \mathbb{R}} \{x \mid u(x) > r\}$ offen in A.

8.15 Bemerkung:

(1) $u: A \to \mathbb{R}$ nuhs $\Leftrightarrow$ $(x_n, x_\infty \in A,\ x_n \to x_\infty \Rightarrow \liminf_{n\to\infty} u(x_n) \geq u(x_\infty))$ ,

(2) u nuhs, so nimmt u auf einer kompakten Teilmenge von A ihr Minimum an ,

(3) u heißt nach oben halbstetig (Abk.: nohs) : $\Leftrightarrow$ -u nuhs .

8.16 Definition: (vergleiche KURATOWSKI (66))

Sei $x \in \mathbb{R}_b^m$ und $\emptyset \neq A_n \subset [x,b]$, $n \in \mathbb{N}$; wir legen fest:

$p \in \overline{\lim_{n\to\infty}} A_n$ : $\Leftrightarrow$ p ist Häufungspunkt einer Folge $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $y_n \in A_n$ .

Man beachte: (vergleiche KURATOWSKI (66), AUMANN (69))

(1) $\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n \neq \emptyset$ ,

(2) $p \in \overline{\lim_{n\to\infty}} A_n \iff$ es gibt eine Folge $p_{k_n}$ mit $p_{k_n} \in A_{k_n}$ ,

$$p = \lim_{n\to\infty} p_{k_n} \quad \text{und} \quad k_1 < k_2 < \ldots$$

## § 9 Gleichmäßige Konvergenz der Wertfunktion des endlichstufigen Modells bei linearer terminaler Funktion und Wertiteration

Für $N \in \mathbb{N}$ und $1 \le k \le N$ hat die Optimalitätsgleichung für $x \in \mathbb{R}_b^m$ im hier vorliegenden Fall die Form

9.1 $$V^k(x) = \inf_{b \ge y \ge x} \{K\delta(y-x) + c'(y-x) + L(y) + \alpha \int V^{k-1}(v(y,t))\, d\Phi(t)\}$$

mit der terminalen Funktion $V^0 = -\tilde{c}$ und nach den §§5,6 existiert zu jedem N eine stark optimale Politik $f^N = (f_N^N, \ldots, f_1^N)$ mit der Eigenschaft

9.2 $$V^k(x) = UV^{k-1}(x) = TV^{k-1}(x, f_k^N(x)) = U^k(-\tilde{c})(x) \ .$$

Man beachte, daß die hier getroffene Notation aufgrund des stationären Charakters des unendlichstufigen Modells geringfügig von der aus Kapitel II abweicht; so gilt z.B. jetzt für eine optimale Politik

$$f_i^N(x) \in O_{N-i+1}^N \ , \quad 1 \le i \le N \ .$$

Wir stellen zunächst Eigenschaften von $V^k$ zusammen.

9.3 Lemma:

Sei $k \in \mathbb{N}$, dann gilt

(1) $x \le y \le b \Rightarrow V^k(x) \le V^k(z) + c'(z-x) + K$,

(2) $V^k(x) \ge -\alpha^k c'x \quad \forall x \in \mathbb{R}_b^m$ .

Auf den einfachen Beweis, der sich aus 9.1 ergibt, wollen wir verzichten und zeigen

9.4 Lemma:

Für $k \in \mathbb{N}$ gilt: $V^k(x)$ ist stetig in $x \in \mathbb{R}_b^m$ .

Beweis:

Wir gehen induktiv vor; für k=1 gilt

$$V^1(x) = \inf_{b \ge y \ge x} \{K\delta(y-x) + c'(y-x) + L(y) - \alpha \int c'v(y,t)\, d\Phi(t)\}$$

$$= \min \begin{cases} L(x) - \alpha \int c'v(x,t)d\Phi(t) & =: F_1(x) \\ \inf_{b \geq y > x} \{K + c'y + L(y) - \alpha \int c'v(y,t)d\Phi(t)\} - c'x & =: F_2(x) \end{cases}$$

$F_1$ ist stetig, und die Stetigkeit von $F_2$ ergibt sich analog zu 4.7 (3), und damit ist $V^1$ stetig. Für den Induktionsschluß reicht es, die Stetigkeit von

$\int V^{k-1}(v(x,t))d\Phi(t)$ in $x \in \mathbb{R}^m_b$ zu zeigen.

Nach Induktionsannahme ist $V^{k-1}(v(x,t))$ stetig für festes t und wegen

$-\alpha^{k-1}c'b \leq V^{k-1}(v(x,t)) \leq V^{k-1}(b) + c'(b-v(x,t)) + K$

liefert der Satz über die dominierte Konvergenz die gewünschte Aussage. ∎

Es soll nun eine Rekursion angegeben werden, durch die die gleichmäßige Konvergenz von $V^N$ in N schon im wesentlichen garantiert wird. Die Idee zu einer solchen Rekursion findet man in IGLEHART (63) und LIPPMAN (69).
Da beide spezielle Strukturen ausnutzen (nämlich die von $\mathbb{R}^1$ bzw. die Struktur der optimalen Politik), ist eine Übertragung auf den hier vorliegenden m-dimensionalen Fall ohne weiteres nicht möglich.
Durch die gleichmäßige Beschränktheit der Mengen $O^N_n$ und durch die damit verbundene Normierung von optimalen Plänen (vergleiche 8.12, 8.13) des endlichen Horizontes gelingt es dennoch, die Idee auf das vorliegende m-Produktmodell zu übertragen.

9.5 Satz:

Sei $N \in \mathbb{N}$, $e \in \mathbb{R}^m_b$ gemäß 8.12, $d \leq e$ und zur Abkürzung

$$r := \max_{d \leq x \leq b} \{\tilde{A}(x) + \int c'(x - v(x,t))d\Phi(t) + \int |c'v(x,t)|d\Phi(t) + K + \alpha c'b\},$$

dann gilt:

(1) $\max_{d\le x\le b}\{|V^2(x)-V^1(x)|\} \le \alpha\cdot r$ ,

(2) $\max_{d\le x\le b}\{|V^{N+1}(x)-V^N(x)|\} \le \alpha^{N-1}\cdot\max_{d\le x\le b}\{|V^2(x)-V^1(x)|\}$ ,

(3) $\max_{d\le x\le b}\{|V^{N+1}(x)-V^N(x)|\} \le \alpha^N\cdot r$ ,

(4) $|V^N(v(x,t))-V^{N-1}(v(x,t))| \le \max_{d\le x\le b}\{|V^N(x)-V^{N-1}(x)|\}$

für $x\in[d,b]$ und $N\ge 2$.

Beweis:

(1) Wir zeigen zunächst eine Abschätzung, die auch für (2) gebraucht wird. Nach 9.2 gilt für $x\in[d,b]$

$TV^N(x,f_{N+1}^{N+1}(x))-TV^{N-1}(x,f_{N+1}^{N+1}(x)) \le V^{N+1}(x)-V^N(x)$ und

$V^{N+1}(x)-V^N(x) \le TV^N(x,f_N^N(x))-TV^{N-1}(x,f_N^N(x))$ und damit

$$|V^{N+1}(x)-V^N(x)| \le \max\left\{\begin{array}{l}|TV^N(x,f_N^N(x))-TV^{N-1}(x,f_N^N(x))|\\ \\ |TV^N(x,f_{N+1}^{N+1}(x))-TV^{N-1}(x,f_{N+1}^{N+1}(x))|\end{array}\right\}$$

Für $\vartheta\in\{N,N+1\}$ folgt unter Beachtung von $f_\vartheta^\vartheta(x)\in O_1^\vartheta\subset(e,b]\subset[d,b]$

9.6 $$|V^{N+1}(x)-V^N(x)| \le \alpha\max_{d\le x\le b}\{\int|V^N(v(x,t))-V^{N-1}(v(x,t))|\,d\Phi(t)\}\ .$$

Für N=1 ergibt sich daraus unter Beachtung von

$|V^1(v(x,t))| \le \tilde{A}(x)+c'(x-v(x,t))+K+\alpha c'b$ gerade (1).

(2) Für $N\ge 2$ greifen wir auf 9.6 zurück und müssen überlegen, daß man auf der rechten Seite von 9.6 $v(x,t)$ durch $x$ ersetzen darf. Sei zur Abkürzung

$R := |V^N(v(x,t))-V^{N-1}(v(x,t))|$ ; falls $v(x,t)\in[d,b]$,

gilt $R\le\max_{d\le x\le b}\{|V^N(x)-V^{N-1}(x)|\}$, und für den Fall

$v(x,t)\notin[d,b]$ erhält man wegen $v(x,t)\notin O_1^N$ und

$v(x,t)\notin O_1^{N-1}$ unter Beachtung von 5.2 dann

$$R=|c'(f_N^N(v(x,t)))+L(f_N^N(v(x,t)))-c'(f_{N-1}^{N-1}(v(x,t)))$$
$$-L(f_{N-1}^{N-1}(v(x,t)))$$
$$+\alpha\int(V^{N-1}(v(f_N^N(v(x,t)),t'))-V^{N-2}(v(f_{N-1}^{N-1}(v(x,t)),t')))d\phi(t')|\ .$$

Aufgrund der getroffenen Normierung der Pläne können wir $f_N^N(v(x,t))$ bzw. $f_{N-1}^{N-1}(v(x,t))$ ersetzen durch $f_N^N(p_e(v(x,t)))$ bzw. $f_{N-1}^{N-1}(p_e(v(x,t)))$. Schreibt man für $*\in\{N,N-1\}$ kurz $f^*:=f_*^*(p_e(v(x,t)))$, dann gilt für R weiter

$$R=|c'f^N+L(f^N)-c'f^{N-1}-L(f^{N-1})+\alpha\int(V^{N-1}(v(f^N,t'))$$
$$-V^{N-2}(v(f^{N-1},t')))d\phi(t')$$
$$+[K\delta(f^N-p_e(v(x,t)))-K\delta(f^{N-1}-p_e(v(x,t)))$$
$$-c'p_e(v(x,t))+c'p_e(v(x,t))]\ |\ .$$

Man überlegt sich, daß der Ausdruck in eckigen Klammern identisch Null ist und hat somit gefunden

$$R=|V^N(p_e(v(x,t)))-V^{N-1}(p_e(v(x,t)))|$$
$$\leq\max_{d\leq x\leq b}\{|V^N(x)-V^{N-1}(x)|\}\ .$$

Wir notieren, daß damit (4) gezeigt ist. Aus 9.6 wird damit

9.7 $$\max_{d\leq x\leq b}\{|V^{N+1}(x)-V^N(x)|\}\leq\alpha\cdot\max_{d\leq x\leq b}\{|V^N(x)-V^{N-1}(x)|\}$$

und induktiv erhält man (2) und zusammen mit (1) auch (3).

∎

Unmittelbar aus 9.5 folgt:

9.8 Korollar:
Sei d wie in 9.5, $x\in[d,b]$, dann gilt: $V^N(x)\leq V^{N+1}(x)+r\cdot\alpha^N$.

9.9 Satz:

$V^N$ konvergiert gleichmäßig auf $[d,b]$ mit $d \leq e$.

Der Beweis ergibt sich sofort aus 9.5 (3).

Wir notieren, daß wegen 9.3 und 9.4 für

$$V_c^\infty(x) := \lim_{N\to\infty} V^N(x) = \lim_{N\to\infty} U^N(-\tilde{c})(x)$$

(Der Index c soll an die terminale Funktion $V^\circ = -\tilde{c}$ erinnern)

gilt:

9.10 $V_c^\infty$ ist stetig und nicht negativ.

Um die Gültigkeit der Wertiteration zu verifizieren, muß noch $V = V_c^\infty$ gezeigt werden. Wir ziehen dazu einen Satz aus SCHÄL (75a) heran, der überdies eine Aussage über die Existenz einer stationären optimalen Politik für das Modell mit unendlichem Horizont macht.
Als Vorbereitung dazu dient

9.11 Satz:

Unter den gemachten Voraussetzungen gilt

$$V^\infty := \lim_{N\to\infty} U^N O = \lim_{N\to\infty} U^N(-\tilde{c}) = V_c^\infty \ .$$

Beweis:

Bedeute $\Delta_M$ wieder die Menge der Markoffpläne, dann gelten in der Terminologie von HINDERER (70) die beiden Aussagen

$$9.12\quad U^N(-\tilde{c})(s) = \inf_{f\in\Delta_M} E_f\{\sum_{i=1}^{N} r_{if}(\mathcal{J}_i)\cdot\alpha^{i-1} - \tilde{c}(\mathcal{J}_{N+1})\cdot\alpha^N \mid \mathcal{J}_1 = s\}$$

und

$$9.13\quad U^N O(s) = \inf_{f\in\Delta_M} E_f\{\sum_{i=1}^{N} r_{if}(\mathcal{J}_i)\cdot\alpha^{i-1} \mid \mathcal{J}_1 = s\} \ .$$

Elementare Abschätzungen zeigen die Gültigkeit von

$$U^N O - U^N(-\tilde{c}) \leq -\inf_{f\in\Delta_M} E_f\{-\alpha^N \tilde{c}(\mathcal{J}_{N+1}) \mid \mathcal{J}_1\} \quad \text{und}$$

$$U^N O - U^N(-\tilde{c}) \geq \inf_{f \in \Delta_M} E_f\{\alpha^N \tilde{c}(\vartheta_{N+1}) \mid \vartheta_1\} \ .$$

Schreibt man in Anlehnung an SCHÄL (75a) $\tilde{T}$ und $\tilde{U}$ anstelle von T und U, wenn man r durch O ersetzt, dann heißt das

9.14 $$\tilde{U}^N(\tilde{c}) \leq U^N O - U^N(-\tilde{c}) \leq -\tilde{U}^N(-\tilde{c}) \ .$$

Weiter gilt

9.15 $$\tilde{U}^N(\tilde{c})(x) \geq \alpha^N(c'x - N\mu) \text{ mit } \mu := \int c' t d\Phi(t) \text{ und}$$

9.16 $$-\tilde{U}^N(-\tilde{c})(x) \leq \alpha^N c'b \ .$$

Beide Aussagen lassen sich induktiv beweisen, und wir zeigen nur den Induktionsschluß von 9.15:

$$\begin{aligned} \tilde{U}^{N+1}(\tilde{c})(x) &= \inf_{b \geq y \geq x} \{\alpha \int (\tilde{U}^N(\tilde{c}))(v(y,t)) d\Phi(t)\} \\ &\geq \inf_{b \geq y \geq x} \{\alpha \int \alpha^N (c'v(y,t) - N\mu) d\Phi(t)\} \\ &\geq \alpha^{N+1}(c'x - (N+1)\mu) . \end{aligned}$$

Aus 9.14 wird damit

$$\alpha^N(c'x - N\mu) \leq U^N O(x) - U^N(-\tilde{c})(x) \leq \alpha^N c'b$$

und dies zeigt die Behauptung.

9.17 Satz: (siehe SCHÄL (75a))

Sei $f^\infty$ ein stationärer Markoffplan, dann sind die folgenden beiden Aussagen äquivalent:

(1) $f^\infty$ ist optimal und es gilt $V = V^\infty$ ,

(2) es gilt $T_f V^\infty = V^\infty$ .

Wir zeigen unten, daß ein stationärer Markoffplan $f^\infty$ existiert, der die Bedingung (2) erfüllt. Damit sind die aufgeworfenen Fragen nach der Existenz eines optimalen stationären Plans und der Gültigkeit der Wertiteration positiv beantwortet. Wir halten fest:

9.18 Satz:
Unter den gemachten Voraussetzungen gelten die beiden folgenden Aussagen:

(1) Es existiert eine optimale stationäre Politik für das Modell mit unendlichem Planungshorizont.

(2) Es gilt Wertiteration, d.h.: $V = \lim_{N\to\infty} V^N$, und die Konvergenz ist gleichmäßig.

Die weiteren Überlegungen dienen dem Nachweis der Existenz eines Plans $f^\infty$, der Bedingung (2) aus 9.17 erfüllt. Der folgende Satz ist einfacher Spezialfall eines Satzes von SCHÄL.

9.19 Satz: (siehe SCHÄL (75a))
Für $u_n:[x,b]\to\mathbb{R}$, $u_n\to u_\infty:[x,b]\to\mathbb{R}$, $u_n$ nuhs mit der Eigenschaft, daß für $n\geq m$, $z\in[x,b]$ und eine nicht negative Nullfolge $\varepsilon_m$ $u_n(z)\geq u_m(z)-\varepsilon_m$ erfüllt ist, gelten die Aussagen:

(1) $u_\infty$ nuhs ,

(2) $\lim_{n\to\infty} \inf_{z\in[x,b]} u_n(z) = \inf_{z\in[x,b]} u_\infty(z)$ ,

(3) für $M_n := \{a\in[x,b] \mid u_n(a) = \inf_{z\in[x,b]} u_n(z)\}$, $n\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}$ ,
gilt: $\overline{\lim_{n\to\infty}} M_n \subset M_\infty$ .

Weiterhin gilt nach SCHÄL (74) im hier vorliegenden Fall

9.20 Satz: (siehe SCHÄL (74))
Zu einer Folge meßbarer Abbildungen $f_N^N$ mit $f_N^N(x)\in[x,b]$ gibt es eine meßbare Abbildung f mit der Eigenschaft $f(x)\in\overline{\lim_{N\to\infty}}\{f_N^N(x)\}\subset[x,b]$.

Sei nun $x \in \mathbb{R}_b^m$ , $d \leq x$ mit d und r aus 9.5; dann ist für $y \in [x,b]$ wegen 9.5 (3), (4)

9.21 $u_n(y) \quad := TV^{n-1}(x,y)$ nuhs und

9.22 für $n \geq m$ gilt $u_n(y) \geq u_m(y) - r \cdot \sum_{i=m}^{\infty} \alpha^i$ .

Wegen $\lim_{n\to\infty} TV^{n-1}(x,y) = TV^{\infty}(x,y)$ liefert 9.19 die Aussagen

9.23 $V^{\infty}(x) = UV^{\infty}(x)$ ,

9.24 für $M_n := \{a \in [x,b] \mid TV^{n-1}(x,a) = UV^{n-1}(x)\}$ ,

$n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ , gilt: $\overline{\lim_{n\to\infty}} M_n \subset M_\infty$ .

Wegen $f_N^N(x) \in M_N$ folgt aus 9.20 die Existenz einer meßbaren Abbildung f mit

$$f(x) \in \overline{\lim_{N\to\infty}} \{f_N^N(x)\} \subset \overline{\lim_{N\to\infty}} M_N \subset M_\infty ,$$

und damit gilt $T_f V^{\infty} = V^{\infty}$ .

## § 10 Gültigkeit der Planiteration

Die wesentlichen Aussagen zur Frage nach der Gültigkeit der Planiteration sind schon in §9 enthalten, so daß §10 neben der Präzisierung des Begriffes mehr den Charakter einer Zusammenfassung trägt.
In §8 wird die Frage gestellt, ob es möglich sei, aus optimalen endlichstufigen Plänen einen optimalen stationären Plan für das unendliche Modell zu gewinnen.
Diese Fragestellung hängt eng zusammen mit dem Konvergenzverhalten der optimalen Aktionen, wobei Konvergenz im Sinne von 8.16 gemeint ist. Legt man den unten präzisierten Begriff der Planiteration zugrunde, dann gestatten geeignete Auswahlsätze (siehe SCHÄL (74)) die Konstruktion eines optimalen Plans mit Hilfe der optimalen endlichstufigen Pläne, so daß die folgenden Aussagen Frage (3) aus §8 einschließen.

Aus §5 sind für $N \in \mathbb{N}$ und $1 \leq k \leq N$ , $k \in \mathbb{N}$, und $x \in \mathbb{R}_b^m$ die Mengen der optimalen Aktionen bekannt, die sich im nun betrachteten Fall schreiben als:

10.1 $D^{*k}(x) = \{a \in [x,b] \mid TV^{k-1}(x,a) = UV^{k-1}(x)\}$ .

Für den unendlichen Horizont haben wir nach 8.7

10.2 $D^{*}(x) = \{a \in [x,b] \mid TV(x,a) = UV(x)\}$ .

Wir wenden uns der folgenden Frage zu:

Sind die in $D^{*N}(x)$ enthaltenen Aktionen für großes N "näherungsweise" optimale Aktionen für das Modell mit unendlichem Horizont, d.h.: gilt "näherungsweise"

für großes N $D^{*N}(x) \subset D^{*}(x)$ ?

Der Begriff "näherungsweise" wird dabei wie folgt präzisiert:

($P_1$) Zu jeder Umgebung G von $D^{*}(x)$ gibt es $n_0 \in \mathbb{N}$, so daß

für alle $N \geq n_0$ gilt: $D^{*N}(x) \subset G$ .

Eine äquivalente Aussage zu $(P_1)$ ist im vorliegenden Fall:

$(P_2)$ $\overline{\lim_{N\to\infty}} D^{*N}(x) \subset D^*(x)$ .

Wir notieren, daß sowohl $D^{*N}(x)$ für alle N als auch $D^*(x)$ nicht leer sind und wegen der Halbstetigkeit von $TV^{N-1}$ und TV abgeschlossen, als Teilmenge von $[x,b]$ sogar kompakt sind.

Wegen $V = V^\infty = V_c^\infty$ nach 9.11 und 9.18 ist nach 9.24 Bedingung $(P_2)$ erfüllt. Wir notieren:

10.3 Satz:

Für das angegebene Modell gilt Planiteration, d.h.:

$\overline{\lim_{N\to\infty}} D^{*N}(x) \subset D^*(x)$ .

Wir fügen noch eine Aussage zur Gestalt eines optimalen Plans an, in der die endlichstufigen Pläne berücksichtigt werden.

Definiert man analog zu §4

$$O^N := \{x \in \mathbb{R}_b^m \mid \inf_{y\in[x,b]} TV^{N-1}(x,y) = TV^{N-1}(x,x)\} ,$$

dann ist $O^N$ als abgeschlossene Menge meßbar und es ist optimal für $x \in O^N$ den Lagerbestand nicht aufzufüllen.

Gilt nun $x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{N=k}^{\infty} O^N$ , d.h.: $x \in O^N$ für unendlich viele $N \in \mathbb{N}$, dann ist es auch für das unendliche Modell optimal, nicht aufzufüllen.

Sei $f^\infty$ der nach 9.20 existierende optimale Plan für das unendliche Modell und

$$\hat{f}(x) := \begin{cases} x & , \; x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{N=k}^{\infty} O^N \\ f(x) & , \quad \text{sonst} \end{cases} ,$$

dann gilt:

10.4 Satz:

Für $x \in \mathbb{R}_b^m$ gilt $T_{\hat{f}} V(x) = V(x)$ .

Beweis:

Es reicht den Fall $x \in O^{N_j}$ , $j \in \mathbb{N}$, und $N_1 < N_2 < \ldots$ zu betrachten.

Grenzübergang und der Satz über die dominierte Konvergenz liefern

$$V^{\infty}(x) = V(x) = \lim_{j \to \infty} TV^{N_j - 1}(x,x)$$

$$= L(x) + \alpha \int V(v(x,t)) \, d\Phi(t) = TV(x,x) \; .$$

∎

## § 11 Optimalität einer stationären verallgemeinerten (s,S) - Politik

Die §§8-10 haben gezeigt, daß für das angegebene Modell mit unendlichem Horizont eine optimale stationäre Politik existiert. Sie soll nun - aufbauend auf den Ergebnissen des Kapitels II - näher charakterisiert werden.
Die weiteren Ausführungen zeigen, daß sich dabei die Struktur des endlichen Modells im wesentlichen auf den unendlichen Fall überträgt.
Analog zu §2 legen wir fest:

11.1 Definition: (vergleiche 2.10)

Sei $w : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ eine meßbare Funktion, für die die folgenden Ausdrücke definiert sind, und sei

$$T^*w(x,y) := K\delta(y-x)+G(y)+\alpha\int w(v(y,t))d\Phi(t) \quad ,$$

$$T_f^*w(x) := T^*w(x,f(x)) \quad \text{für eine meßbare Abbildung } f : \mathbb{R}_b^m \to \mathbb{R}_b^m \text{ mit } f(x) \in [x,b] \quad \forall x \in \mathbb{R}_b^m \quad ,$$

$$U^*w(x) := \inf_{y \in [x,b]} \{T^*w(x,y)\} \, .$$

Wählt man die das endliche Lagermodell charakterisierenden Größen sämtlich unabhängig vom Periodenindex i, dann zeigt ein Vergleich von 2.6, 2.10, 8.4 und 11.1 zusammen mit 2.11 die Gültigkeit von

11.2 $$U^N(-\tilde{c}) = U^{*N}0 - \tilde{c}$$

Aus 9.9, 9.10 und 9.11 folgt nun, daß in $\mathbb{R}$ auch

11.3 $$V^{*\infty} := \lim_{N\to\infty} U^{*N}0$$

existiert und daß gilt

11.4 $$V^\infty = V^{*\infty} - \tilde{c} \, .$$

Aus 9.18 folgt sofort

11.5 Lemma:

Es gilt $U^*V^{*\infty} = V^{*\infty}$ .

Optimalität eines stationären Planes kann wie im endlichen Fall wieder durch die gesternten Operatoren charakterisiert werden:

11.6 Lemma: (vergleiche 2.12)

$f^\infty$ ist optimal $\iff$ $T_f^* V^{*\infty} = V^{*\infty}$ .

Der Beweis folgt aus 8.6, 9.18 und 11.4 .

Als unmittelbare Folgerung - die Bedingung (A) aus II sehr ähnlich ist - erhalten wir aus 11.3, 11.4 und 9.3

11.7 Lemma:

(1) $V^{*\infty}$ ist stetig ,

(2) $V^{*\infty}$ ist K-isoton ,

(3) $V^{*\infty}(x) < \infty \quad \forall x \in \mathbb{R}_b^m$ .

Wegen $c'v(y,t) \leq c'v(y,t) + V^\infty(v(y,t)) \leq V^{*\infty}(y) + K$ folgt überdies $V^{*\infty}(v(y,t)) \in \mathcal{L}_1(\Phi)$ , so daß die folgende Definition vernünftig ist:

11.8 Definition: (vergleiche 4.1)

Für $z,y \in \mathbb{R}_b^m$ sei

(1) $R^\infty(y) := \int V^{*\infty}(v(y,t))\,d\Phi(t)$ ,

(2) $J^\infty(y) := G(y) + \alpha R^\infty(y)$ ,

(3) $H^\infty(y) := \inf_{b \geq z > y} \{K + J^\infty(z)\}$ ,

(4) $O^\infty := \{x \in \mathbb{R}_b^m \mid J^\infty(x) \leq H^\infty(x)\}$ .

Den Zusammenhang zu den Operatoren $T^*$, $U^*$ liefert

11.9 Lemma: (vergleiche 4.2, 4.3)

(1) $U^* V^{*\infty} = \min\{J^\infty, H^\infty\}$,

(2) $x \in O^\infty \iff \inf_{b \geq y \geq x} T^* V^{*\infty}(x,y) = T^* V^{*\infty}(x,x)$.

Wie im endlichen Fall reduziert sich die Aufgabe, eine optimale Politik für das unendliche Modell anzugeben auf die Aufgabe: Bestimme eine optimale Politik auf

$$\mathbb{R}_b^m \setminus O^\infty .$$

Die nächste Aussage erinnert an Bedingung (B) aus II.

11.10 Lemma:

(1) $V^{*\infty}$ ist antiton auf $\{z \mid z \leq \xi\}$ ,

(2) $x \in Q(\xi) \Rightarrow \bigwedge_{x \leq z \leq p_\xi(x)} V^{*\infty}(x) \geq V^{*\infty}(z)$ .

Auf den einfachen Beweis, der sich durch Grenzbetrachtungen ergibt, soll verzichtet werden.

11.11 Lemma: (vergleiche 4.12)

(1) $\xi \leq x \leq y \leq b \Rightarrow R^\infty(x) \leq R^\infty(y) + K$ ,

(2) $x \leq y \leq \xi \Rightarrow R^\infty(x) \geq R^\infty(y)$ ,

(3) $x \in Q(\xi) \Rightarrow \bigwedge_{x \leq z \leq p_\xi(x)} R^\infty(x) \geq R^\infty(z)$ .

Beweis:
Aus der Definition von $R^\infty$ ergibt sich (1) mit 11.7, (2) aus 11.10, jeweils unter Beachtung der Isotonie von $v(y,t)$ in $y$; zu (3): sei $x \in Q(\xi)$ und $x \leq z \leq p_\xi(x)$; wir beschränken uns auf den Fall $v(x,t) \in Q_-(\xi)$; aus 11.10 folgt dann die Behauptung. ∎

11.12 Korollar: (vergleiche 4.13)
Die Aussage von 11.11 gilt, falls man $R^\infty$ durch $J^\infty$ ersetzt.
Zum Beweis beachte man die Eigenschaften von G.

11.13 Lemma: (vergleiche 4.7, 4.14)

Für $x \in \mathbb{R}_b^m$ gilt

(1) $R^\infty$, $J^\infty$, $H^\infty$ sind stetig,

(2) $\min \{J^\infty(y) \mid y \in [x,b]\} = \min\{J^\infty(y) \mid y \in [p_\xi(x),b]\}$.

Der Beweis ergibt sich analog zum endlichen Fall.

Völlig analog zum endlichen Fall läßt sich auch für

$x \in \mathbb{R}_b^m$ und

$D^*(x) = \{a \in [x,b] \mid T^*V^{*\infty}(x,a) = V^{*\infty}(x)\}$ ,

$W(x) := \{a \in [p_\xi(x),b] \mid J^\infty(a) = \min\{J^\infty(y) \mid y \in [x,b]\}\}$ ,

$\tilde{W}(x) := \{a \in [x,b] \mid J^\infty(a) = \min\{J^\infty(y) \mid y \in [x,b]\}\}$

formulieren und beweisen:

11.14 Lemma: (vergleiche 5.2)

(1) $x \in \mathbb{R}_b^m \setminus O^\infty \Rightarrow (a \in \tilde{W}(x) \Rightarrow a > x)$ ,

(2) $x \in \mathbb{R}_b^m \setminus O^\infty \Rightarrow W(x) \subset \tilde{W}(x) = D^*(x)$ ,

(3) $x \in O^\infty \Rightarrow x \in D^*(x)$ .

Damit können wir eine optimale Politik für das Modell mit unendlichem Horizont angeben und die weiteren Ausführungen zeigen, daß es sich dabei wieder um eine verallgemeinerte (s,S) - Politik handelt.

Sei

$$f(x) := \begin{cases} x & , x \in O^\infty \\ m(x) & , x \notin O^\infty \end{cases}$$

mit $m(x) \in W(x)$, dann gilt

11.15 Satz: (vergleiche 5.3)

Falls f meßbar gewählt werden kann, ist $f^\infty$ optimale Politik für das Modell mit unendlichem Horizont.

Der Beweis ergibt sich aus 11.6 und 11.14 .

Wie beim Modell mit endlichem Horizont läßt sich die Frage nach der Meßbarkeit positiv beantworten. Der in §6 zitierte Selektionssatz aus SCHÄL (75a) läßt sich auch hier anwenden, wobei sich der Nachweis der Voraussetzungen zu diesem Satz aufgrund der Struktur von $J^\infty$ völlig analog zu 6.8 ergibt. Wir halten fest:

11.16 Lemma: (vergleiche 6.5,6.8)

Die Abbildung f aus 11.15 kann meßbar gewählt werden.

Der nächste Satz zeigt, daß die angegebene optimale Politik für den unendlichen Horizont wieder eine verallgemeinerte (s,S) - Politik ist. Die in 5.5 gegebene Interpretation läßt sich unmittelbar auf den hier vorliegenden Fall übertragen; darüberhinaus ergibt sich für das hier vorliegende stationäre Modell noch folgende Aussage:

Für $S \in [\xi,b]$ mit $J^\infty(S) = \min \{J^\infty(x) \mid x \in [\xi,b]\}$ und einen Startbestand des Lagers $x_1 \leq S$ vereinfacht sich die Form der optimalen Politik zu

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in O^\infty \\ S, & x \notin O^\infty \end{cases} .$$

11.17 Satz: (vergleiche 5.4,4.7)

(1) $\{x \in \mathbb{R}_b^m \mid x \geq \xi\} \subset O^\infty$ ,

(2) $f(x) \in O^\infty$ für f aus 11.15,

(3) $x \in O^\infty$ , $x \leq y \leq \xi \Rightarrow y \in O^\infty$ ,

(4) $x \in O^\infty \cap Q(\xi)$, $x \leq z \leq p_\xi(x) \Rightarrow z \in O^\infty$ .

Der Beweis verläuft analog zu 5.4.

Wie im endlichen Fall für $O_i^N$, so lassen sich auch für $O^\infty$ Schranken angeben. Der Beweis verläuft analog zu dem von 4.15 und wir verzichten deshalb auf seine Ausführung.

11.18 Satz: (vergleiche 4.15)

Es gibt $a \in \mathbb{R}_b^m$ mit $O^\infty \subset [a,b]$.

Wir wollen die Situation noch abrunden und betrachten wieder den Fall nur linearer Bestellkosten.

Gelten zusätzlich

(Z1') $K = 0$ ,

(Z2') die Monotonieeigenschaften von G seien "streng" im Sinne von 3.1,

dann läßt sich analog zu 7.1 formulieren und beweisen:

11.19 Satz: (vergleiche 7.1)

Unter den zusätzlichen Voraussetzungen (Z1'), (Z2') gilt:

(1) $O^\infty = [\xi,b]$ ,

(2) für $f(x) = p_\xi(x)$ gilt: $f^\infty$ ist optimal

(3) die Bestellmengen sind antiton, d.h. :
$x \le y \le b \Rightarrow f(x)-x \ge f(y)-y$ .

Die in §7 gemachten Bemerkungen gelten sinngemäß.

## § 12 Beispiele zur Kostenfunktion G

Nach den Überlegungen des Kapitels II reicht es, den eindimensionalen Fall zu betrachten, falls sich G bzw. L in geeigneter Weise durch Funktionen der einzelnen Komponenten zusammensetzen. Man vergleiche dazu §3.
Wir beschränken uns der Einfachheit halber auf den Fall, daß sämtliche Größen nicht vom Periodenindex abhängen (eine Übertragung auf den instationären Fall ist problemlos) und nehmen an, daß die folgenden Generalvoraussetzungen für $j = 1,\dots,m$ erfüllt sind (vergleiche dazu etwa HOCHSTÄDTER (69) oder HENN/KÜNZI (68)):

(G1) $\Phi^j$, die Verteilungsfunktion der Nachfrage nach dem j-ten Gut, ist stetig und es gilt

$$\int t\,d\Phi^j(t) =: \mu^j < \infty .$$

(G2) $v(y,t) = y-t$ , $y \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}_+$ .

(G3) Alle auftretenden Kosten sind positiv, $0<\alpha\leq 1$.

Beispiel 1:

Bedeuten $f_1^j$ Fehlmengenkosten pro Einheit des j-ten Gutes und $u^j$ Lagerungskosten pro Einheit des noch am Ende der Periode vorhandenen j-ten Gutes, dann ist folgender Kostenansatz möglich:

$$l_1^j(y^j,t^j) := u^j(y^j-t^j)^+ + f_1^j(t^j-y^j)^+ .$$

$y^j$ sei dabei der Lagerbestand des j-ten Gutes zu Beginn der Periode nach erfolgter Auffüllung und $t^j$ die Nachfrage in der Periode.
Als mittlere Lagerungs- und Fehlmengenkosten erhält man:

$$L_1^j(y^j) = u^j\int(y^j-t^j)^+ d\Phi^j(t^j) + f_1^j\int(t^j-y^j)^+ d\Phi^j(t^j)$$

$$= (u^j+f_1^j)\int_0^{y^j}(y^j-t^j)\,d\Phi^j(t^j) + \int_{y^j}^{\infty} t^j\,d\Phi^j(t^j)) - u^j\mu^j - f_1^j y^j$$

und für $G^j(y^j) := c^j y^j + L_1^j(y^j) - \alpha c^j\int(y^j-t^j)\,d\Phi^j(t^j)$

ergibt sich weiter

$$G^j(y^j) = (c^j - \alpha c^j - f_1^j)y^j + (\alpha c^j - u^j)\mu^j$$
$$+ (u^j + f_1^j)(y^j\phi^j(y^j) + \int_{y^j}^{\infty} t^j d\phi^j(t^j)) .$$

Unter der natürlichen Annahme $f_1^j > c^j - \alpha c^j$, die besagt, daß die Fehlmengenkosten pro Einheit größer sind als die Ersparnis, die dadurch entsteht, daß man den Erwerb einer Einheit auf die nächste Periode verschiebt, anstatt den Lagerbestand sofort um eine Einheit zu erhöhen, gilt

12.1 Lemma:

$-G^j$ ist unimodal.

Beweis:

Wegen $0 \leq \frac{f_1^j - c^j + \alpha c^j}{u^j + f_1^j} < 1$ gilt: $\bigvee_{\xi^j \geq 0} \phi^j(\xi^j) = \frac{f_1^j - c^j + \alpha c^j}{u^j + f_1^j}$

und wir zeigen exemplarisch: $\xi^j \leq x^j \leq y^j \Rightarrow G^j(y^j) \geq G^j(x^j)$.

$$G^j(y^j) - G^j(x^j)$$
$$= (c^j - \alpha c^j - f_1^j)(y^j - x^j) + (u^j + f_1^j)(y^j\phi^j(y^j) - x^j\phi^j(x^j) - \int_{x^j}^{y^j} t^j d\phi^j(t^j))$$
$$= (c^j - \alpha c^j - f_1^j)(y^j - x^j) + (u^j + f_1^j)\phi^j(x^j)(y^j - x^j)$$
$$\geq 0.$$

∎

Wählt man für $y := (y^1, \ldots, y^m)'$ und $t := (t^1, \ldots, t^m)'$

$$l_1(y,t) := \sum_{j=1}^{m} l_1^j(y^j, t^j) ,$$

$$v(y,t) := (y^1 - t^1, \ldots, y^m - t^m)' ,$$

$$\Phi(t^1, \ldots, t^m) := \prod_{j=1}^{m} \phi^j(t^j) ,$$

$$L_1(y) := \int l_1(y,t)\,d\Phi(t) \quad ,$$

$$G(y) := c'y + L_1(y) - \alpha\int c'(y-t)\,d\Phi(t) \quad ,$$

dann gilt nach den Überlegungen aus §3 :

12.2 Satz:

$G(y) = \sum_{j=1}^{m} G^j(y^j)$ und $-G$ ist unimodal erzeugt.

Wir zeigen nun noch, daß auch die zweite Forderung an G erfüllt ist.

12.3 Satz:

Es gilt $\lim_{x\to-\infty} G(x) = +\infty$ (vergleiche Annahme (v) in §3) .

Beweis:

Sei $M > (\alpha c^j + f_1^j)\mu^j$ und $a^j := \dfrac{M-(\alpha c^j+f_1^j)\mu^j}{c^j-\alpha c^j-f_1^j}$ ; man überlegt sich leicht, daß für $y^j<a^j$ $G^j(y^j)>M$ erfüllt ist. Für $k = 1,\ldots,m$ sei $M^k := \sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{m} G^j(\xi^j)$ und

$$M' := \max\{-\min\{M^k \mid k = 1,\ldots,m\},\ \max\{(\alpha c^j+f_1^j)\mu^j \mid j=1,\ldots,m\}\} .$$

Sei nun M beliebig, $M''>\max\{0,M\}$ und $M''' := M'' + M'$; dann ist $M''' >\max\{(\alpha c^j+f_1^j)\mu^j \mid j=1,\ldots,m\}$ und zu $y\in\{1,\ldots,m\}$ gibt es gemäß den obigen Überlegungen ein $a^j$ mit $y^j<a^j \Rightarrow G^j(y^j)>M'''$ . Sei nun $a := (a^1,\ldots,a^m)$ und $y\not\geq a$, d.h.: es gibt $k_o\in\{1,\ldots,m\}$ mit $y^{k_o}<a^{k_o}$ , dann gilt für G(y):

$$\begin{aligned} G(y) &= \sum_{j=1}^{m} G^j(y^j) \\ &= \sum_{\substack{j=1\\ j\neq k_o}}^{m} G^j(y^j) + G^{k_o}(y^{k_o}) \geq \sum_{\substack{j=1\\ j\neq k_o}}^{m} G^j(\xi^j) + G^{k_o}(y^{k_o}) \\ &= M^{k_o} + G^{k_o}(y^{k_o}) > M^{k_o} + M''' > M. \end{aligned}$$

∎

Beispiel 2:

Mit $u^j$ seien wie oben Lagerungskosten gemeint und wir nehmen jetzt an, daß Fehlmengenkosten $f_2^j$ erst dann entstehen, wenn eine Vormerkung auch in der folgenden Periode nicht befriedigt werden kann. Diese Kosten treten also genau dann auf, wenn der Lagerbestand des j-ten Gutes nach erfolgter Auffüllung zu Beginn der Periode negativ ist, die vorgemerkte Nachfrage also höchstens zum Teil befriedigt worden ist.
Dies führt zum Kostenansatz

$$l_2^j(y^j,t^j) := u^j(y^j-t^j)^+ + f_2^j(y^j)^- .$$

Wir weisen darauf hin, daß eine zusätzliche Berücksichtigung von Inspektions- oder Kontrollkosten völlig problemlos ist. Als mittlere Lagerungs- und Fehlmengenkosten erhält man

$$L_2^j(y^j) = u^j(y^j\Phi^j(y^j) + \int_{y^j}^{\infty} t^j d\Phi^j(t^j)) - u^j\mu^j + f_2^j(y^j)^-$$

und verfährt man weiter wie im Beispiel 1, dann läßt sich unter der Annahme $f_2^j > c^j - \alpha c^j$ wieder zeigen

12.4 Satz:

(1) $-G^j$ ist unimodal (mit Modalpunkt 0),

(2) $G(y) = \sum_{j=1}^{m} G^j(y^j)$ und $-G$ ist unimodal erzeugt,

(3) es gilt $\lim_{x\to-\infty} G(x) = +\infty$.

## IV Literaturverzeichnis


Aumann, G. (69) Reelle Funktionen
Berlin: Springer

Berge, C. (63) Topological Spaces
New York: Macmillan Company

Bourbaki, N. (66) General Topology I
Paris: Hermann

Henn, R.
Künzi, H.P. (68) Einführung in die Unternehmensforschung II
Heidelberger Taschenbücher Band 39
Berlin: Springer

Hinderer, K. (70) Foundations of non-stationary dynamic programming with discrete time parameter
Lecture Notes in Operations Research and Mathematical Economics, Vol.33;
Berlin: Springer

Hinderer, K. (70) Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitstheorie
Berlin: Springer

Hildenbrand, W. (74) Core and equilibria of a large economy
Princeton, New Jersey:
Princeton University Press

Hochstädter, D. (69) Stochastische Lagerhaltungsmodelle
Lecture Notes in Operations Research and Mathematical Economics,
Vol.10; Berlin: Springer

Hochstädter, D. (70) Neuere Entwicklung der stochastischen Lagerhaltungstheorie.
Unternehmensforschung Heute
Lecture Notes in Operations Research and Mathematical Economics,
Vol.50; Berlin: Springer

Iglehart, D.L. (63) — Optimality of (s,S) - policies in the infinite horizon dynamic inventory problem
Man. Sci. 9 , 259-267

Ignall, E.
Veinott, A.F. (69) — Optimality of myopic inventory policies for several substitute products.
Man. Sci.15, 284-304

Johnson, G.D.
Thompson, H.E. (75) — Optimality of myopic inventory policies for certain dependent demand processes.
Man. Sci.21, 1303-1307

Kuratowski, K. (66) — Topology I
New York and London: Academic Press

Lippman, S.A. (69) — Optimal inventory policy with sub-additiv ordering costs and stochastic demands.
SIAM J.Appl. Math.17, 543-559

Porteus, E.L. (71) — On the optimality of generalized (s,S) - policies.
Man. Sci.17, 411-426

Scarf, H. (60) — The optimality of (s,S) policies in the dynamic inventory problem.
Mathematical Methods in the Social Science, K.J.Arrow, S.Karlin P.Suppes (eds.)
Stanford: Stanford University Press

Schäl, M. (74) — A selection theorem for optimization problems.
Arch. Math. XXV, 219-224

Schäl, M. (75a) Conditions for optimality in dynamic programming and for the limit of n-stage optimal policies to be optimal.
Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete
32, 179-196

Schäl, M. (75b) On the optimality of (s,S)policies in dynamic inventory models with finite horizon.
Erscheint in SIAM J.Appl. Math.

Veinott, A.F. (65) Optimal policy for a multi-product, dynamic, nonstationary inventory problem
Man. Sci.12, 206-222

Veinott, A.F. (66) On the optimality of (s,S) inventory policies: New conditions and a new proof.
SIAM J.Appl. Math.14, 1067-1083

Vogel, W. (70) Wahrscheinlichkeitstheorie
Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht

## V Symbolliste

Symbole, die nicht im Text definiert werden:

| | |
|---|---|
| $\mathbb{N}$ | Menge der natürlichen Zahlen; $0 \notin \mathbb{N}$ |
| $\mathbb{R}$ | Menge der reellen Zahlen |
| $\mathbb{R}_+$ | Menge der nicht negativen reellen Zahlen |
| $\mathbb{R}^m = \underbrace{\mathbb{R}_+ \times \ldots \times \mathbb{R}_+}_{m\text{-mal}}$ | |
| $\emptyset$ | leere Menge |
| $\mathcal{P}'(A)$ | Menge der nicht leeren Teilmengen von A |
| Id | Identische Abbildung |
| $f\|_A$ | Abbildung f eingeschränkt auf A |
| $[\ ]$ | Indikatorfunktion |
| $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ | Produkt $\sigma$-Körper |
| $\max(x,0) = (\max(x^1,0),\ldots,\max(x^m,0))'$ | für $x \in \mathbb{R}^m$ |
| ∎ | Ende eines Beweises |

Symbole, die im Text definiert werden:


$[a,b]$, $(a,b]$ : 16

$A_b$, $A^c$ : 16

$\mathcal{B}^m$, $\mathcal{B}_b^m$ : 16

$Q_i$, $Q_{+i}$, $Q_{-i}$, $Q$, $Q_+$, $Q_-$ : 25

$p_a(x)$ : 26


Kostenstruktur des Lagers


$\Phi_i$, $D_i$, $\vartheta_i$ : 15

$v_i$, $\delta$, $c_i$, $K_i$ : 16

$l_i$, $L_i$, $h$, $\alpha_i$ : 17

$\Phi$, $\vartheta$, $B(z)$ : 51

$v$, $c$, $K$, $l$, $L$, $\alpha$ : 52

$G_i$, $R_i$, $J_i$, $H_i$, $O_i$ : 22, 31

$G$ : 50

$O_i^N$ : 54

$R^\infty$, $J^\infty$, $H^\infty$, $O^\infty$, : 72

Größen, die das Entscheidungsmodell definieren

$S_n$, $\mathcal{Y}_n$, $A_n$, $\mathcal{A}_n$, $D_n$, $p$, $q_n$, $r_n$, $V^o$ : 19, 20

$S$, $\mathcal{Y}$, $A$, $\mathcal{A}$, $D$, $p$, $q$, $r$ : 51, 52

Kostenstruktur im Entscheidungsmodell

$V_i$, $V_{if}$ : 20, 21

$V^\infty$ : 64

$V_i^N$, $V_{if}^N$ : 54

$V_c^\infty$ : 64

$V^N$, $V_f^N$ : 54

$V^{*\infty}$ : 71

$V$, $V_f$ : 52

$V_i^*$ : 22

Operatoren

$T_i$, $T_{if}$, $U_i$ : 21

$T_i^*$, $T_{if}^*$, $U_i^*$ : 22

$T$, $T_f$, $U$ : 53

$T^*$, $T_f^*$, $U^*$ : 71

Optimale Aktionen und Pläne

$D_i^*(x)$, $W_i(x)$, $\tilde{W}_i(x)$ : 37

$D^*(x)$, $W(x)$, $\tilde{W}(x)$ : 53, 74

$f^N$, $f_i^N$ : 54

$f^\infty$ : 52

Sonstiges

$\xi_i$ : 27

$\xi$ : 50

$m_i(x)$ : 37

$m(x)$ : 74

$\overline{\lim}\ A_n$ : 58

Lebenslauf

Als Sohn der Eheleute Ernst und Hedwig Kalin wurde ich, Dieter Kalin, am 12. August 1949 in Mülheim an der Ruhr geboren. Im Jahre 1956 trat ich dort in die Volksschule am Klostermarkt ein und wechselte 1960 zum Städtischen Gymnasium Mülheim an der Ruhr, wo ich meine Reifeprüfung im Mai 1968 ablegte.

Im WS 1968/69 begann ich in Bonn Mathematik zu studieren. Nach der Diplom-Vorprüfung im Jahre 1970 wechselte ich vom ursprünglichen Nebenfach Physik zum Nebenfach Betriebswirtschaftslehre. Am 17. Oktober 1973 erfolgte die Diplom-Hauptprüfung im Fach Mathematik.

Seit dem 1. November 1973 verwalte ich die Stelle eines Wissenschaftlichen Assistenten am Institut für Angewandte Mathematik der Universität Bonn in der Abteilung für Wahrscheinlichkeitstheorie und Mathematische Statistik.

Meine akademischen Lehrer waren die Herren Professoren

H. Albach, E. Bodenstedt, K. Dietz, H. Fischer, P. Gabriel, G. Harder, G. Hasenjäger, F. Hirzebruch, G. Knop, H.-J. Krümmel, R. Leis, W. Paul, E. Peschl, M. Schäl, W. Schwabhäuser, J. Tits, H. Unger, W. Vogel.